∽ Baccalauréat C Paris [1] septembre 1977 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

1. l'équation

$$3x - 5y = 6$$

2. le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - 5y & = & 6 \\ y & = & x^2 \pmod 5. \end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
On considère l'application F de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On n'essaiera pas de « calculer l'intégrale ».

1. Étudier le sens de variation de F.
2. Étudier le signe de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = F(x) - \mathrm{Log}\,x,$$

   où Log désigne la fonction logarithme népérien.
   En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
3. Soit (C) la courbe représentative de F dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé. On admet, pour tout réel t, l'inégalité

$$\mathrm{e}^t > t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}.$$

   Que peut-on en déduire sur la branche infinie de (C) lorsque x tend vers $+\infty$?
   Tracer dans P la courbe (C).

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $(a,\, b,\, c)$ décrit $\mathbb{R}^3$. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Créteil–Versailles

1. On donne $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ élément de $\mathscr{A}$.

   Démontrer que, pour tout entier n, $n > 1$, il existe un nombre réel γ_n tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \gamma_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

   Démontrer que, si $a \neq b$,

$$\gamma_n = c\frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

   Dans le cas où $a = b$, exprimer γ_n en fonction de a, c, n.

2. On désigne par $\mathscr{A}'$ l'ensemble des éléments $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ de $\mathscr{A}$ pour lesquels il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = \mathrm{I}$.

   a. Montrer que $|a| = |b| = 1$.

   b. Montrer que A est de l'une des formes suivantes :

$$A = \mathrm{I}, \quad A = -\mathrm{I}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   c. Conclure que tout élément A de $\mathscr{A}'$ vérifie $A^2 = \mathrm{I}$.

Partie B

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension deux, muni d'une base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. L'application identique de E est notée e . Etant donné une application linéaire g de E dans E, on note, pour tout entier $k > 2$, g^k la composée de k applications égales à g ; g^1 désigne, suivant l'usage, g.

Exemple préliminaire : on considère l'application linéaire u de E dans E définie par

$$u\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad u\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = -\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}.$$

1. Montrer que l'équation $u^{=}$e, dont l'inconnue est l'entier m strictement positif, admet au moins une solution. Résoudre l'équation.
2. Montrer que, pour tout vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ de E, $\overrightarrow{v}$ et $u\left(\overrightarrow{v}\right)$ forment une partie libre.

Objet du problème : On s'intéresse aux applications linéaires f de E dans E, distinctes de e, pour lesquelles il existe un entier strictement positif q tel que $f^q =$ e. Pour chaque application f, on désigne par p le plus petit entier strictement positif tel que $f^p =$ e.
On distingue, pour une telle application, les deux cas suivants :

1. *Cas A : il existe au moins un vecteur non nul $\overrightarrow{w}$ tel que $f\left(\overrightarrow{w}\right)$ soit colinéaire à $\overrightarrow{w}$.*

   Ce vecteur $\overrightarrow{w}$ étant fixé, on choisit une base de E dont le premier vecteur est $\overrightarrow{w}$.

   a. Montrer que la matrice de f relativement à cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

   b. Que vaut p ? Quelles sont toutes les applications f de ce cas A ?

2. *Cas B : Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul, $\overrightarrow{v}$ et $f\left(\overrightarrow{v}\right)$ forment une partie libre.*

a. Montrer que $p = 2$ est impossible, en considérant l'image par f du vecteur $f\left(\overrightarrow{v}\right) - \overrightarrow{v}$ ou du vecteur $f\left(\overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{v}$.

b. Soit $\overrightarrow{v_0}$ un vecteur non nul de E. On pose, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\overrightarrow{v_k} = f^k\left(\overrightarrow{v_0}\right)$. Montrer, dans l'ordre que l'on préférera, que

- $\left(\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}\right)$ est une base de E et que, dans cette base, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix}0 & c\\ 1 & b\end{pmatrix}$ où $c = +1$ ou $c = -1$;
  (on ne cherchera ni à déterminer le signe de c, ni à calculer b) ;
- $f\left(\overrightarrow{v_{p-1}}\right) = \overrightarrow{v_0}$, les vecteurs $\overrightarrow{v_k}$ sont tous non nuls et la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \overrightarrow{v_k}$ est nulle.

Partie C

On définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E : il associe à deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de E le réel noté $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$.

1. Étant donné une application linéaire g de E dans E et un entier r supérieur ou égal à deux, on pose :

$$\Phi_{g,\,x}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \sum_{k=1}^{r-1} g^k\left(\overrightarrow{y}\right)(x).$$

Montrer que l'application $\Phi_{g,\,x}$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est, elle aussi, un produit scalaire sur E.

2. On prend pour g une application f de la partie B et pour r l'entier p associé. On note $\left(E, \Phi_f\right)$ l'espace vectoriel euclidien obtenu en munissant E du produit scalaire $\Phi_{f,\,p}$ désigné par Φ_f.
Démontrer que

a. f est une isométrie de $\left(E, \Phi_f\right)$,

b. si p est strictement supérieur à deux, f est une rotation de $\left(E, \Phi_f\right)$.

c. On prend ici $f = u$,où u est l'application considérée au début de B.
Calculer $\Phi_u\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}\right)$, $\Phi_u\left(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\Phi_u\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Interpréter la valeur du rapport $\dfrac{\Phi_u\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)}{\Phi_u\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}\right)}$. Vérifier cette interprétation en tenant compte de la valeur de l'entier p associé à u.