

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris¹ septembre 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans le corps des nombres complexes les équations d'inconnue z :

a. $z^4 = 1$.

b. $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1$.

2. Soit n un entier naturel non nul, et A un nombre complexe.

Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z : $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = A$

On appelle P et Q les points du plan complexe d'affixes respectives i et $-i$, et M le point d'affixe z .

a. Montrer que si z vérifie l'équation (E), alors $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$.

b. Prouver que si l'équation (E) a au moins une racine réelle alors $|A| = 1$.

c. En conclure que si l'équation (E) a au moins une racine réelle, alors toutes ses racines sont réelles.

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan affine P, on considère le cercle (C) de centre O et de rayon R non nul, et un point Ω tel que $O\Omega > R$.

1. Démontrer qu'à tout point M de (C) distinct de deux points A et B que l'on précisera, on peut associer un point M' tel que M' soit le centre d'un cercle passant par Ω et tangent à (C) au point M.

Indiquer une construction du point M'.

2. a. Démontrer que pour tout point M de (C) distinct des points A et B, la relation :

$$|M'\Omega - M'O| = R$$

est vérifiée.

On admettra que l'ensemble des points M' tels que $|M'\Omega - M'O| = R$ est l'hyperbole (H) de foyers O et Ω , et dont la distance des sommets est R .

b. Déterminer alors l'ensemble E décrit par M' lorsque M décrit le cercle (C) privé des points A et B.

c. Préciser les axes de symétries et les sommets de E.

1. Paris, Créteil, Versailles, Caen; Clermont-Ferrand, Dijon, Grenoble, Limoges, Lyon, Nancy-Metz, Poitiers, Reims, Rennes, Rouen, Strasbourg

PROBLÈME**12 points**

A. - On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1}e^{-x}.$$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1.
 - a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
 - b. Étudier le sens de variation de f .
 - c. Montrer que (\mathcal{C}) admet une droite asymptote et préciser la position de (\mathcal{C}) par rapport à cette asymptote.
 - d. Tracer la courbe (\mathcal{C}) sur une feuille de papier millimétré (en prenant 4 cm pour une unité de longueur).
2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

- a. Donner une interprétation géométrique de u_n . Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

- b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle admet pour limite zéro.

B. - On considère la fonction numérique Φ de la variable réelle x définie sur $[-1 ; +\infty[$ par :

$$\Phi(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t+1}e^{-t} dt$$

(on ne cherchera pas à calculer $\Phi(x)$).

On désigne par (Γ) la courbe représentative de Φ dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Expliciter la fonction dérivée de Φ . Donner le sens de variation de Ψ .
2. a. Démontrer que si $t \in [-1 ; +\infty[$ alors

$$\sqrt{t+1} \leq \frac{t+3}{2\sqrt{2}}$$

En déduire que : pour tout x élément de l'intervalle $[-1 ; +\infty[$

$$\Phi(x) \leq \int_{-1}^x \frac{1}{2\sqrt{2}}(t+3)e^{-t} dt.$$

b. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^x \frac{1}{2\sqrt{2}}(t+3)e^{-t} dt$$

En déduire que : pour tout x élément de l'intervalle $[-1 ; +\infty[$

$$\Phi(x) \leq \frac{3e}{2\sqrt{2}}.$$

et que $\Phi(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ (on ne cherchera pas à déterminer cette limite).

c. Donner l'allure de la courbe (Γ) et préciser sa tangente au point d'abscisse -1 .