Baccalauréat série mathématiques et technique
Paris juin 1947

I. 1er sujet

Démontrer les théorème conduisant à la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers par la méthode des divisions successives.
Prendre pour exemples les nombres 45 648 et 7 236.
Ensuite calculer le plus rapidement possible, et sans donner d'explications, le plus petit, commun, multiple des deux mêmes nombres.

I. 2e sujet

Résoudre un triangle connaissant (deux côtés et l'angle compris entre ces côtés.

I. 3e sujet

Donner la définition de l'inversion et démontrer les théorèmes prouvant que l'inversion conserve l'angle de deux courbes.

II.

Soient $x'\mathrm{O}x$, $y'Oy$, deux axes rectangulaires; sur $x'\mathrm{O}x$ deux points fixes U et V d abscisses $+k$ et $-k$; M un point de coordonnées x ; y) ; UM = u, VM = $v$les longueurs des *rayons vecteurs* de M.
On définira ci-dessous une longueur constante w, et l'on posera $u+v+w=2$.

Partie A

1. Calculer u et v en fonction de x et y; puis x^2 et y^2 en fonction de u et v.
   Reconnaître dans certaines relations rencontrées au cours de ce calcul, des théorèmes connus.
2. On constatera que $16k^2y^2$ s'exprime par un polynôme bicarré en k.
   Le décomposer en un produit de quatre facteurs, où l'on utilisera les notations p et w, w étant ici égal à $2k$.
3. Lieu des points tels que $p(p-u)(p-v)I)(p-w)$ soit constant.

Partie B

M décrit l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, où $a>b$. On pose

$$q^2-b^2=c^2;$$

Dans cette deuxième partie, $w=\dfrac{2ka}{c}$.
U et V sont donc deux points fixes situés sur la droite qui porte le grand axe, mais ce ne sont pas nécessairement les foyers.

1. Montrer que l'équation de l'ellipse entraînè la relation

$$p(p-u)(p-v)(p-w)=\frac{k^2a^2b^2\left(x^2-k^2\right)}{c}$$

2. Réciproquement, si un point variable M vérifie la relation $p(p-u)(p-v)(p\ w)=q$ où w et q sont deux grandeurs constantes convenables ($w>2k$; q positif, nul ou négatif mais supérieur à un· certain minimum), M décrit une ellipse dont on calculera le grand axe et la distance focale.
   Comment se modifie cette ellipse si k et w restant fixes, on modifie la constante q?

3. On suppose k inférieur à c en valeur absolue.
Soient, sur $x'\text{O}x$, les deux points fixes I et J d'abscisses $+\dfrac{w}{2}$ et $-\dfrac{w}{2}$.
Montrer. que, à tout point M de l'ellipse dont les longueurs des rayons vecteurs sont respectivement UM $= u$, VM $= v$, on peut faire correspondre deux points P et P$'$ dont les longueurs des rayons vecteurs sont aussi égales à u et v, mais comptées à partir de I et de J :

$$\text{IP} = u = \text{UM} \quad ; \quad \text{JP} = v = \text{VM}.$$

Sur quelles lignes L se déplacent les points P et P$'$?
Calçuler le rapport entre ['abscisse X, de P et de P$'$ et l'abscisse x de M.
Limiter le lieu de P et de P$'$ sur les lignes L.
Calculer les abscisses des points où les lignes L coupent l'ellipse.

N. B. - Cotation : cours, sur 10 ; problème, sur 20.