Baccalauréat - Paris juin 1951

SÉRIE MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

I

1^er^ sujet

Établir la formule donnant la dérivée de la fonction $y = \sin x$, la variable x étant un arc exprimé en radians.
Appliquer à la fonction de t :

$$y = \sin(\omega t + \varphi)$$

où t est un temps exprimé en secondes, ω une vitesse angulaire exprimée en radians par seconde et φ un arc exprimé en radians.

2^e^ sujet

Définir une primitive de la fonction $\cos x$; donner (sans démonstration) l'expression de toutes ses primitives ; énoncer et établir une signification géométrique d'une telle primitive (en se bornant à des valeurs de x comprises entre 0 et π).
Calculer, à l'aide des tables de logarithmes, la valeur de l'aire limitée dans un plan de coordonnées à axes perpendiculaires, par l'axe des abscisses, les parallèles à l'axe des ordonnées d'abscisses $\dfrac{\pi}{10}$ et $\dfrac{\pi}{5}$ et l'arc correspondant de la courbe d'équation $y = \cos x$.

3^e^ sujet

Définir la tangente à la courbe représentative de la fonction $y = \text{tg}\, x$, en un point d'abscisse arbitraire x_0 $\left(\text{comprise entre } 0 \text{ et } \dfrac{\pi}{2}\right)$; démontrer son existence en déterminant son coefficient angulaire.
Calculer, à l'aide des tables de logarithmes, l'angle de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{5}$. (axes de coordonnées perpendiculaires).

II

On donne dans un plan un cercle (C) de centre O et de rayon R.

1. M étant un point quelconque du plan et (D) une droite quelconque passant en M dans le plan, construire les cercles (α) et (β) passant par M et tangents à la droite (D) et au cercle (C).

   (On pourra utiliser une inversion de pôle M.)

   A et B étant les points de contact avec (C), montrer que le cercle ABM est orthogonal à la droite (D) et au cercle (C).
2. Soit M′ le point diamétralement opposé à M sur le cercle ABM.

   Montrer que le lieu de M′, quand la droite (D) tourne autour de M, supposé fixe, est une droite (m).

   Quel est, dans les mêmes conditions, le lieu du point de rencontre des tangentes en A et B au cercle (C) ?
3. On suppose maintenant que (D) est une droite fixe passant à la distance $\text{OH} = \dfrac{\text{R}}{2}$ de O et que M est un point de (D) à la distance $\text{HM} = x$ de H.

   Calculer, en fonction de R et x, les rayons des cercles (α) et (β).

   Comment varie le rapport de ces rayons quand M décrit (D) ?

   Dans les mêmes conditions, trouver les lieux des centres des cercles (α) et (β).