Baccalauréat Paris juin 1952 série mathématiques

I. - 1^{er} sujet.

Caractères de divisibilité par 11.
Application aux trois nombres suivants :

$$35\,912\,591, \quad 35\,112\,501, \quad 10\,203\,030.$$

Indiquer, pour ceux de ces nombres qui ne sont pas divisibles par 11, comment on trouve, sans faire de division, le reste de leur division par 11.

I. - 2^e sujet

Définir la symétrie par rapport à un point et la symétrie par rapport à un plan.
Une figure (F) étant donnée, comparer :

1. les deux figures symétriques de (F) par rapport à deux points O_1 et O_2 ;
2. les deux figures symétriques de (F) par rapport à deux plans P_1 et P_2 :
   a. parallèles ;
   b. sécants.

I. - 3^e sujet

Montrer. que si un point M est animé sur un axe $x'Ox$ d'un mouvement défini par l'équation

$$x = \text{OM} = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta).$$

il est la projection orthogonale sur cet axe d'un point P décrivant un cercle d'un mouvement uniforme.
Application : Déterminer la demi-amplitude du mouvement vibratoire simple.

$$x = a\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) - a\sin 2t.$$

II.

Sur un axe $x'Ox$, orienté de x' vers x, on donne les points A et A' tels que $\overline{\text{OA}} = -\overline{\text{OA}'} = a > 0$.
À un point M, variable sur $x'Ox$, on fait correspondre le point M', sur $x'Ox$, par la relation

$$\overline{\text{AM}} \cdot \overline{\text{A}'\text{M}'} = -4a^2.$$

1. a. Calculer $u = \overline{\text{MM}'}$ en fonction de a et de $\overline{\text{OM}} = x$.
   b. Étudier les variations de u quand M décrit $x'x$. Construire la courbe représentative en prenant a = 1 cm.
   c. Déterminer, par son abscisse, un point M tel que le segment MM' ait une longueur donnée ℓ.
   Discuter, soit algébriquement, soit en utilisant le graphique précédent.

2. On adjoint à l'axe $x'x$ un axe $y'\mathrm{O}y$, orienté de O vers y et l'on oriente le plan de ces axes de façon que

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{O}y}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Soit B un point de $y'y$ défini par $\overline{\mathrm{OB}} = b$.

On désigne par φ l'une des mesures de l'angle de droites (BM, BM′).

a. Calculer les pentes des droites BM et BM′ dans le système d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.
En déduire tg φ en fonction de a, b, x.

b. Montrer qu'il existe deux positions du point B pour lesquelles φ a une valeur (définie à $k\pi$ près) indépendante de M.
Quelles sont ces positions et les valeurs correspondantes de φ ?

c. En déduire une construction géométrique du point M dont il est question au paragraphe **1. c.** (On pourra, par exemple, chercher deux lieux géométriques du centre ω du cercle Γ circonscrit au triangle BMM′.)

3. On considère celui des points B du paragraphe **2. b.** dont l'ordonnée est $a\sqrt{3}$.
Les droites BM et BM′ recoupent le cercle (C) circonscrit au triangle ABA′ en m et m', respectivement.

a. Enveloppe de la droite mm'.

b. Enveloppe du cercle Γ circonscrit au triangle BMM′. (On pourra, par exemple, utiliser une inversion convenable, de centre B.)

c. Lieu du centre (ω) de Γ.
Préciser les éléments de ce lieu. (Cette question peut être résolue indépendamment de la précédente.)

N. B. - Cotation de la question de cours : sur 10 ; du problème : sur 20.