∽ Baccalauréat Paris juin 1966 ∾
série mathématiques élémentaires

Le candidat doit traiter LES DEUX exercices ET le problème

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Étudier la variation de la jonction f de la variable réelle x définie par :

$$y = f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

2. Construire sa représentation graphique.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. z étant un nombre complexe, développer $(z+1)^3$.
   Résoudre l'équation :

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0.$$

2. Construire les images des racines.
3. Trouver tous les nombres entiers relatifs n tels que $n^3 + 3n^2 + 3n - 7$ soit divisible par 8.

PROBLÈME **12 POINTS**

Une unité de longueur étant choisie, on considère l'ensemble $(\mathcal{T})$ des triangles ABC ayant pour périmètre cette unité. On pose :

$$\mathrm{BC} = x, \quad \mathrm{CA} = y, \quad \mathrm{AB} = z.$$

À tout triangle t de $(\mathcal{T})$, on fait correspondre le point M qui a pour coordonnées x, y, z dans l'espace rapporté à un repère orthonormé. Le point M est dit image de t.
On désigne par U, V, W les points d'intersection du plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$ avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, respectivement.
On rappelle que, pour que les trois nombres réels x, y, z soient les mesures des côtés d'un triangle, il faut et il suffit que chacun d'eux soit positif et inférieur à la somme des deux autres.

1. Démontrer que l'ensemble formé par les images M de tous les triangles t de $(\mathcal{T})$ est l'intérieur d'un triangle DEF dont les sommets D, E, F appartiennent respectivement aux plans de coordonnées Oyz, Ozx, Oxy.

   Vérifier que l'image G d'un triangle équilatéral t de $(\mathcal{T})$ coïncide avec le centre de gravité du triangle DEF.
2. On effectue sur les sommets A, B, C d'un triangle t de $(\mathcal{T})$ toutes les permutations possibles, ce qui donne pour les images les six points :

$$M_1(x~;~y~;~z); \quad M_2(y~;~z~;~x); \quad Ms(z~;~x~;~y);$$

$$M_4(y~;~x~;~z); \quad M_5(x~;~z~;~y); \quad M_6(z~;~y~;~x).$$

Etudier la configuration de ces six points dans le plan du triangle DEF.

On indiquera dans ce plan la construction des points M_4, M_5, M_6 à partir du point M_1 et la construction du triangle $M_1 M_3 M_2$ à partir du triangle $M_4 M_5 M_6$. (La figure de géométrie plane correspondante sera effectuée en représentant DE par une longueur de 10 cm environ).

En déduire que les 6 points M_i sont sur un même cercle de centre G dont on calculera le rayon en fonction de x, y, z.

3. Quelles sont les images des sous-ensembles de $(\mathscr{T})$ suivants : triangles rectangles en C, triangles rectangles en A, triangles rectangles en B ?

Les dessiner avec soin sur une nouvelle figure de géométrie plane représentant le triangle DEF.

4. Quelle est l'image du sous-ensemble de $(\mathscr{T})$ formé par les triangles ayant leurs côtés en progression géométrique, AB étant le côté moyen ? Un tel triangle peut-il être rectangle ?