

🌀 Baccalauréat Paris juin 1966 🌀
série mathématiques élémentaires

Le candidat doit traiter LES DEUX exercices ET le problème

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Étudier la variation de la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$y = f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

2. Construire sa représentation graphique.

EXERCICE 2

4 POINTS

1. z étant un nombre complexe, développer $(z + 1)^3$.

Résoudre l'équation :

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0.$$

2. Construire les images des racines.
3. Trouver tous les nombres entiers relatifs n tels que $n^3 + 3n^2 + 3n - 7$ soit divisible par 8.

PROBLÈME

12 POINTS

Une unité de longueur étant choisie, on considère l'ensemble $(\mathcal{T})$ des triangles ABC ayant pour périmètre cette unité. On pose :

$$BC = x, \quad CA = y, \quad AB = z.$$

À tout triangle t de $(\mathcal{T})$, on fait correspondre le point M qui a pour coordonnées x, y, z dans l'espace rapporté à un repère orthonormé. Le point M est dit image de t .

On désigne par U, V, W les points d'intersection du plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$ avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, respectivement.

On rappelle que, pour que les trois nombres réels x, y, z soient les mesures des côtés d'un triangle, il faut et il suffit que chacun d'eux soit positif et inférieur à la somme des deux autres.

1. Démontrer que l'ensemble formé par les images M de tous les triangles t de $(\mathcal{T})$ est l'intérieur d'un triangle DEF dont les sommets D, E, F appartiennent respectivement aux plans de coordonnées Oyz, Ozx, Oxy.

Vérifier que l'image G d'un triangle équilatéral t de $(\mathcal{T})$ coïncide avec le centre de gravité du triangle DEF.

2. On effectue sur les sommets A, B, C d'un triangle t de $(\mathcal{T})$ toutes les permutations possibles, ce qui donne pour les images les six points :

$$M_1(x; y; z); \quad M_2(y; z; x); \quad M_3(z; x; y);$$

$$M_4(y; x; z); \quad M_5(x; z; y); \quad M_6(z; y; x).$$

Etudier la configuration de ces six points dans le plan du triangle DEF.

On indiquera dans ce plan la construction des points M_4, M_5, M_6 à partir du point M_1 et la construction du triangle $M_1M_3M_2$ à partir du triangle $M_4M_5M_6$. (La figure de géométrie plane correspondante sera effectuée en représentant DE par une longueur de 10 cm environ).

En déduire que les 6 points M_i sont sur un même cercle de centre G dont on calculera le rayon en fonction de x, y, z .

3. Quelles sont les images des sous-ensembles de $(\mathcal{T})$ suivants : triangles rectangles en C, triangles rectangles en A, triangles rectangles en B?

Les dessiner avec soin sur une nouvelle figure de géométrie plane représentant le triangle DEF.

4. Quelle est l'image du sous-ensemble de $(\mathcal{T})$ formé par les triangles ayant leurs côtés en progression géométrique, AB étant le côté moyen? Un tel triangle peut-il être rectangle?