Durée : 4 heures

Baccalauréat Paris juin 1965

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Trouver tous les entiers naturels diviseurs du nombre 108.
Trouver tous les couples $(x,\ y)$ d'entiers naturels tels que leur plus grand commun diviseur d et leur plus petit commun multiple m satisfassent à

$$m - 3d = 108, \quad 10 < d < 15.$$

EXERCICE 2

1. Déterminer, en posant $x = \dfrac{1}{u}$, la limite de $x\text{Log}\,x$ quand x tend vers zéro. $(x > 0)$
2. Déterminer les nombres a et b de manière que la fonction $z = x(a\text{Log}\,x + b)$ soit une primitive de la fonction $y = -\text{Log}\,x$.
3. On désigne par $S(t)$, pour $0 < t < 1$, l'aire du domaine plan limité par l'axe $x'x$ et la courbe

$$y = -\text{Log}\,x$$

compris entre les parallèles à $y'y$ d'abscisses t et 1.
Calculer $S(t)$ et déterminer la limite de $S(t)$ quand t tend vers zéro. (Le repère utilisé est supposé orthonormé.)

EXERCICE 3

Par rapport à un repère orthonormé $\mathcal{R}$ (origine O, axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$) une conique E a pour équation

$$12x^2 + 16y^2 + 12ax - 9a^2 = 0,$$

où a désigne la mesure d'une longueur donnée $(a > 0)$.

1. Calculer les coordonnées de son centre, de ses foyers, de ses sommets.
Écrire les équations de ses directrices D et D$'$ (on désignera par D celle qui rencontre l'axe focal en un point d'abscisse positive).
Calculer son excentricité e.
Soit M un point quelconque de E. Calculer en fonction de a et de l'abscisse x de M l'expression rationnelle de la longueur OM. On pose

$$\text{OM} = \rho \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{O}x}\,,\ \overrightarrow{\text{OM}}\right) = \theta.$$

Calculer ρ en fonction de a et de θ.
2. À chaque point M de E, de coordonnées x, y, on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, affixe de M.
Écrire l'expression trigonométrique de z (on désignera par θ son argument et l'on exprimera le module de z en fonction de a et de θ).
Soit z' et z'' les affixes des deux points M$'$ et M$''$ de E, d'arguments respectifs α et $\alpha + \pi$.

a. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z' - z''$ et en déduire la longueur du segment M$''M''$.

b. On considère, dans le plan, le point P dont l'affixe Z est définie par la relation

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}.$$

Écrire l'expression trigonométrique de Z.

En déduire le lieu géométrique de P quand α varie. Que peut-on dire de la figure formée par les points O, P, M$'$, M$''$?

3. Soit (J) l'inversion de pôle O qui laisse invariant le cercle principal de E et m', m'', p les transformés de M$'$, M$''$, P par (J).

Quelle particularité présente la figure formée par les trois points m', m'', p ?

Calculer la longueur du segment $m'm''$.

Quel est le lieu géométrique de p ?

En déduire une définition géométrique de la courbe transformée de E par (J).