∽ Paris juin 1967 ∾
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

La variable x décrivant l'intervalle $[0 ; \pi]$, étudier la variation de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos x + 2\cos 2x$$

et construire son graphique dans un repère orthonormé (unité : 2 cm). Déterminer, à l'aide d'une table, l'abscisse, en radians, du point où ce graphique rencontre l'axe $x'\text{O}x$.

EXERCICE 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$, la position d'un point mobile M, à l'instant de date t, est définie par les relations

$$x = 1 - 3t^2 \quad \text{et} \quad y = 3t - t^3.$$

On appelle P le point où la tangente en M à la trajectoire de M rencontre la droite (D) perpendiculaire à $x'\text{O}x$ au point M_0 de coordonnées $(+1 ; 0)$.
Trouver, à l'instant de date t, les composantes du vecteur vitesse du point M et celles du vecteur vitesse du point P. Comparer les longueurs de ces deux vecteurs.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$. La notation $M(x ;\ y)$ désigne le point M d'abscisse x et d'ordonnée y. On utilisera les points E $(+1 ; 0)$ et $\text{E}'(-1 ; 0)$.

1. Étant donné un point M du plan, on appelle M_1 son transformé dans la symétrie orthogonale d'axe $y'\text{O}y$. Former la relation entre x et y qui équivaut à la nullité du produit scalaire $\overrightarrow{M\text{E}} \cdot \overrightarrow{M\text{E}'}$.
Montrer que l'ensemble des points M qui satisfont à cette condition est l'hyperbole équilatère (H) de sommets E et E$'$.
2. Étant donné deux points $M(x ;\ y)$ et $M'(x' ;\ y')$ de (H), distincts ou non, on définit le point $\text{S}(X ;\ Y)$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& xx' + yy',\\ Y &=& xy' + yx'.\end{array}\right.$$

On dit que S est le « produit » de M par M' et l'on pose

$$S = M \star M'.$$

On établira alors les propriétés suivantes :
   - **a.** S appartient à (H) ;
   - **b.** on a $M \star M' = M' \star M$;
   - **c.** étant donné un troisième point quelconque, $M''\left(x'' ;\ y'\right)$, de (H), on a $\left(M \star M'\right) \star M'' = M \star \left(M' \star M''\right)$.
   Puis on calculera $M\star$ E et l'on montrera que, pour tout point $M(x ;\ y)$ de (H), il existe un point $\overline{M}$ de (H), que l'on précisera, tel que $M \star \overline{M} =$ E. [En résumé le « produit » noté $\star$ munit (H) d'une structure de groupe commutatif.]

3. Étant donné deux points distincts, M et M', de (H), on pose $S = M \star M'$.
Vérifier que S est le point de (H) tel que les cordes ES et MM' soient parallèles.
Que devient ce résultat quand M' tend vers M ?
Trouver la propriété de la corde MM' qui équivaut à $S = \text{E}'$.
Donner une propriété équivalente faisant intervenir le produit scalaire $\overrightarrow{M\text{E}} \cdot \overrightarrow{M\text{E}'}$.

4. **a.** Soit AB et CD deux cordes rectangulaires de (H). On pose $A \star B = P$ et $C \star D = Q$.
Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{P\text{E}}$ et $\overrightarrow{Q\text{E}}$?
Déduire de ceci que le « produit » $A \star B \star C \star D$ est égal à E$'$.
Déduire alors du 2 que les cordes AC et BD sont rectangulaires, ainsi que les cordes AD et BC.

   b. Soit AB et AC deux cordes rectangulaires de (H).
Calculer le « produit » $A \star A \star B \star C$.
Que peut-on dire de la tangente en A à (H) ?
Montrer que le cercle de diamètre BC recoupe (H) au point A' symétrique de A par rapport à O.

   c. On fixe un point A de (H). On considère deux cordes, AB et AC, de (H), qui varient en restant rectangulaires.
Que peut-on dire de la droite BC ?