Durée : 4 heures

Baccalauréat Paris septembre 1965

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

1. Développer $(\alpha+1)^4$.
2. Le nombre α appartenant à l'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à 6, en déduire l'écriture de $(\alpha+1)^4$ dans le système de numération de base α.

EXERCICE 2

Étude de la variation et graphe de la fonction

$$y=\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}.$$

On commencera par étudier le domaine de définition, la périodicité et la parité de la fonction.

EXERCICE 3

Dans ce problème, la lettre α désigne un nombre réel donné, strictement positif, et la lettre λ un paramètre variable appartenant à l'ensemble des nombres réels.
On considère, dans un repère cartésien orthonormé, les points fixes $\mathrm{A}(0\,;\ \alpha)$ et $\mathrm{B}(0\,;\ -\alpha)$, ainsi que l'ensemble Φ des cercles $C(\lambda)$ d'équation

$$x2+y2-2\lambda x-\alpha^2=0.$$

1. Démontrer que l'ensemble Φ est un faisceau de cercles, que l'on précisera.
   Étant donné un cercle $C(\lambda)$, avec $\lambda\neq 0$, démontrer qu'il existe un cercle $C\left(\lambda'\right)$ et un seul orthogonal à $C(\lambda)$ et construire ce cercle.
   Exprimer λ' en fonction de λ et de α.
   Étudier le cas $\lambda=0$.
2. Soit $\mathscr{I}$ l'inversion de pôle B et de puissance $4\alpha^2$.
   a. Démontrer que cette inversion transforme les deux cercles orthogonaux $C(\lambda)$ et $C\left(\lambda'\right)$ en deux droites perpendiculaires (Δ) et (Δ') passant par A.
   b. (D) étant une tangente commune extérieure aux deux cercles orthogonaux $C(\lambda)$ et $C\left(\lambda'\right)$, soit Ω le cercle inverse de (D) dans l'inversion $\mathscr{I}$ et soit ω son centre.
   Démontrer que le rapport des distances du point ω aux points A et B est constant quand λ varie.
   En déduire que l'ensemble des points ω est un cercle (Γ) appartenant au faisceau conjugué du faisceau (Φ).
   c. Déterminer l'équation du cercle (Γ) et les coordonnées de son centre. Calculer son rayon.
3. **a.** Calculer la puissance du point B pour le cercle (Γ). Déterminer le centre et le rayon du cercle $\left(\Gamma'\right)$, inverse du cercle (Γ) dans l'inversion $\mathscr{I}$.
   b. En désignant par ω', l'inverse de ω dans l'inversion $\mathscr{I}$, démontrer que la droite (D) est la médiatrice du segment $\mathrm{B}\omega'$.
   En déduire que la droite (D) est tangente à une conique. Déterminer l'équation de cette conique .