Durée : 4 heures

Baccalauréat Paris septembre 1966
série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Calculer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$.
En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{10}$ en remarquant que $\cos \dfrac{5\pi}{10} = 0$.

II.

1. Soit E l'ensemble des nombres complexes $z = x + \text{i}y$, où x et y sont des entiers relatifs.
   Est-ce que, quels que soient z et z' appartenant à E, il existe z'', avec z' différent de zéro, appartenant à E tel que $z = z'z''$?
2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres complexes $z = x + \text{i}y$, où x et y sont des nombres rationnels positifs, négatifs ou nul.
   Est-ce que, quels que soient z et z' appartenant à $\mathcal{E}$, il existe z'', avec z' différent de zéro, appartenant à $\mathcal{E}$ tel que $z = z'z''$?

III.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy) on donne la parabole (P) d'équation
$y^2 - 2px = 0$ ($p > 0$).
Par un point m quelconque du plan, on mène la parallèle à l'axe des abscisses, qui coupe (P) en A et l'on prend le symétrique, M, de m par rapport à la tangente en A à (P).

1. On suppose (P) définie par son foyer, F, et sa directrice (que l'on déterminera).
   Donner une construction géométrique de M, connaissant m.
2. Soit x, y les coordonnées de m ; soit X, Y les coordonnées de M. Démontrer les formules
   $$X = \frac{y^2(x+p) - p^2x}{y^2+p^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{py(2x+p)}{y^2+p^2}.$$
   [Le point m de coordonnées x, y et la parabole (P) d'équation $y^2 - 2px = 0$ ($p > 0$) étant supposés donnés, on pourra considérer M comme l'intersection de deux droites convenablement choisies dont on cherchera les équations.]
3. Les formules ainsi établies au **2.** définissent une transformation ponctuelle (T) qui, à un point m du plan, fait correspondre un point M.
   Déterminer *analytiquement* :
   a. les points invariants par (T) ;
   b. les figures transformées par (T) :
      i. de l'axe des abscisses,
      ii. de la directrice de (P),
      iii. de la droite d'équation $y = y_0$ (y_0 étant une constante donnée),
      iv. de la droite d'équation $x = x_0$ (x_0 étant une constante donnée).
4. Former l'équation de la courbe à laquelle doit appartenir m pour que le point M soit sur la droite d'équation $X = X_0$, où X_0, est une constante donnée.
   Étudier la variation de la fonction $x = f(y)$ ainsi obtenue pour $X_0 = 2p$ et tracer la courbe représentative dans un système d'axes orthonormé.
5. Démontrer géométriquement les résultats demandés dans la question **3.** de ce problème.