Baccalauréat Paris septembre 1967
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Dans cet exercice, a et b désignent des nombres entiers naturels.
Déterminer les fractions $\dfrac{a}{b}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$0 < \frac{a}{b} < 1, \qquad a + b = 264,$$

le plus grand commun diviseur de a et de b est 12.

II.

1. Un nombre complexe a pour module ρ et pour argument θ.
   Quels sont le module et l'argument de son carré ?
   Quels sont le module et l'argument de chacune de ses racines carrées ?
2. Dans le plan complexe, on désigne par $u'\text{O}u$: la bissectrice de l'angle des axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$. Un point M parcourt $u'\text{O}u$; on désigne par ρ la distance de M à O.
   - **a.** Exprimer, suivant la position de M sur $u'\text{O}u$, le module et l'argument du nombre complexe z dont M est l'image.
   - **b.** Soit N l'image de z^2 ; quel est l'ensemble des points N ?
     Soit P_1 et P_2 les images des racines carrées de z ; quel est l'ensemble des points P_1 et P_2 ?

III.

Dans un plan orienté, P, on considère deux points distincts, O et E, la droite Δ_1 passant par O et telle que l'angle de droites (OE, Δ_1) soit égal à $\dfrac{\pi}{3}$, et la droite Δ_2 perpendiculaire en O à OE.
On note S_1 la symétrie orthogonale (ou axiale) d'axe Δ_1, S_2 la symétrie orthogonale (ou axiale) d'axe Δ_2 et T la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{OE}}$.
Étant donné un point quelconque M du plan P, on note M_1 son transformé, $\text{S}_1(\text{M})$, par S_1 M_2 le transformé, $\text{S}_2(\text{M}_1) = (\text{S}_2 \circ \text{S}_1)(\text{M})$, de M_1 par S_2 et M$'$ le transformé, $\text{T}(\text{M}_2)$, de M_2 par T.

1. Quelle est la transformation $\text{S}_2 \circ \text{S}_1$ produit de S_1 par S_2 ?
   En déduire que la transformation $\text{T} \circ \text{S}_2 \circ \text{S}_1$ (qui transforme M en M$'$) est une rotation, R ; déterminer l'angle et le centre, I, de R.
2. Soit Ox, Oy un repère orthonormé tel que le point O soit l'origine et le point E ait pour abscisse 2 et pour ordonnée 0.
   Calculer, en fonction des coordonnées x et y du point M, les coordonnées x_1 et y_1 de M_1, puis les coordonnées x_2 et y_2 de M_2.
   Vérifier enfin que les coordonnées x" et y' du point M$'$ sont

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2\\ y' & = & \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{array}\right.$$

   Trouver les coordonnées du centre, I, de la rotation R définie au **1.**
   Exprimer x et y en fonction de x_1 et y_1.

3. Soit m un paramètre réel. Montrer que la droite D_m d'équation $mx - y + \sqrt{3} = 0$ passe par un point fixe, A, indépendant de m.
Quelle est l'équation de la droite D'_m transformée de D_m par la rotation R ?
Montrer géométriquement que D_m passe par un point fixe, N, indépendant de m ; vérifier ceci analytiquement.