∽ Baccalauréat C (oral) Paris juin 1968 ∾

Exercice 1

Donner toutes les formes possibles d'un nombre entier naturel N admettant 21 diviseurs.
Quel est le plus petit des nombres remplissant cette condition ?

Exercice 2

On considère, en géométrie plane, la rotation ayant pour centre un point donné, O, et pour angle un angle donné, θ. Soit A un point fixe du plan, M un point quelconque et M' le transformé de ce point M par la rotation ci-dessus.
Étudier l'ensemble des points M tels que, k désignant un nombre positif ·donné, l'on ait

$$\frac{\text{A}M}{\text{A}M'} = k.$$

Exercice 3

Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{\text{e}^x}{x}.$$

Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

Exercice 1

1. Étant donné, dans l'espace, trois points, A, B et C, construire le point G tel que l'on ait

$$\overrightarrow{\text{GA}} - \overrightarrow{\text{GB}} + \overrightarrow{\text{GC}} = \overrightarrow{0}.$$

2. Étudier, en utilisant ce point G, l'ensemble des points M de l'espace tels que, k désignant un nombre réel donné, on ait

$$M\text{A}^2 - M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = k.$$

Exercice 2

Étudier l'ensemble des points M du plan complexe tels que, z étant l'affixe de M et M' étant le point d'affixe $1 + z^2$, les points M et M' soient alignés avec l'origine, O, des coordonnées.

Exercice 3

Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

sur le segment $[0\,;+1]$.

Exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, un mobile M est animé d'un mouvement tel que ses coordonnées soient définies, à tout instant, t, par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5\cos t,\\ y & = & 3\sin t.\end{array}\right.$$

1. Déterminer la trajectoire du point M et le sens du déplacement de ce mobile sur sa trajectoire.

2. Déterminer les intervalles de temps dans lesquels le mouvement du mobile est accéléré ou retardé.

3. Déterminer le vecteur accélération du mobile à un instant quelconque t.

Exercice 1

On considère l'affinité (A) définie, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, de la façon suivante : elle a pour axe la droite d'équation $y = -x$; sa direction est celle de l'axe des y et son rapport est + 2.
$M(x\,;\,y)$ étant un point du plan, calculer, en fonction de x et y, les coordonnées, x' et y', du point M', transformé de M par l'affinité (A).

Exercice 2

Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$$

Construire la courbe représentative.

Exercice 1

Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$y = \mathrm{Log}\left|\mathrm{Log}\,x\right|,$$

où la notation Log désigne le logarithme népérien.

Exercice 2

Démontrer que, étant donné deux entiers arithmétiques, a et b, si M est leur plus petit commun multiple et Δ leur plus grand commun diviseur, le plus grand commun diviseur de $a - b$ et M est Δ.

Exercice 1

Soit (C) la courbe qui représente graphiquement, par rapport à un repère orthonormé, la fonction

$$y = (\text{Log}\, x)^2,$$

dans l'intervalle $]0\ ;\ \text{e}]$. Reconnaître que la fonction

$$z = x(\text{Log}\, x)^2 - 2x\text{Log}\, x + 2x$$

a pour dérivée y.
En déduire l'aire du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Exercice 2

On considère la parabole (P), de foyer F et de directrice (D) ; soit p son paramètre.
Une sécante variable, (Δ), passant par F coupe cette parabole en M et M'.

1. Démontrer que le cercle, (C), de diamètre MM' est tangent à la directrice (D).

2. Démontrer que, K désignant la projection du point F sur (D), la somme des puissances des points K et F par rapport à (C) est égale à $-p2$.

Exercice 1

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère la transformation (S) qui, au point $M(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2\cos\alpha - x\cos 2\alpha - ysin2\alpha, \\ y' & = & 2\sin\alpha - x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha, \end{array}\right.$$

1. Déterminer par son équation l'ensemble, (D), des points doubles de la transformation (S).

2. Quelle est la transformation réciproque de (S) ? La transformation (S) est-elle involutive ? Montrer que (S) définit une bijection du plan sur lui-même.

Exercice 2

Soit, dans le plan complexe, B, M et M' les images des trois nombres complexes i, z et iz.
Déterminer l'ensemble des positions de M pour lesquelles ces trois points sont alignés.

Exercice 1

On considère, dans le plan complexe, la transformation définie par la relation suivante :

$$(1) \qquad Z = f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

1. Quels sont les points doubles de cette transformation ?
2. Montrer que la relation (1) est équivalente à la suivante :

$$(2) \qquad \frac{Z-\mathrm{i}}{Z+\mathrm{i}} = \mathrm{i}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

Exercice 2

On donne un segment de droite AB, de longueur $4a$, et, sur ce segment, le point C tel que AC $= a$.
Un cercle variable (ω), de centre ω, est tangent en C à AB ; des points A et B on mène à ce cercle les tangentes autres que AB ; soit I leur point d'intersection.
Montrer que, lorsque le cercle (ω) varie, l'ensemble des points I est une conique, dont on précisera les éléments : foyers, sommets, centre, excentricité, asymptotes, directrices.

Exercice 1

On considère une ellipse (E), de foyers F et F$'$ (FF$' = 2c$), dont A et A$'$ sont les sommets du grand axe (AA$' = 2a$). Soit M un point appartenant à cette ellipse et distinct de A et de A$'$.
Déterminer les points de contact respectifs, T et T$'$, avec la droite AA$'$ des cercles (Γ) et $\left(\Gamma'\right)$ exinscrits au triangle FMF$'$ respectivement dans l'angle F$'$ et dans l'angle F.

Exercice 2

Calculer y tel que

$$\text{Log}\, y = \text{Log}\left(7+5\sqrt{2}\right) + 8\text{Log}\left(\sqrt{2}+1\right) + 7\text{Log}\left(\sqrt{2}-1\right) + 2\text{Log}\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Exercice 1

On donne, dans le plan, un cercle (C), de centre O et de rayon R, un point A situé à une distance donnée, d, du point O ($d \neq R$) et une droite (D) passant par A.
Utiliser l'inversion $(\mathcal{J})$ de pôle A qui laisse le cercle (C) invariant pour étudier les cercles (Γ) tangents en A à (D) et tangents à (C).
Construire ces cercles dans un cas de figure précisé. Discuter.

Exercice 1

Déterminer le module et l'argument de chacune des solutions de l'équation suivante, où $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 - z^2\sqrt{2} + 1 = 0.$$

Exercice 1

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
En déduire la valeur de l'expression suivante :

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8.$$

Exercice 2

On donne, dans le plan orienté, un rectangle ABCD :

$$\mathrm{AB} = a, \quad \mathrm{AD} = 2a, \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Soit M le milieu de son côté BC.

1. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe transformant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
2. Montrer que le centre, O, de cette similitude est le symétrique du point M par rapport à BD.

Exercice 1

Déterminer les racines carrées du nombre complexe

$$z = -5 - 12\mathrm{i}.$$

Exercice 2

On considère, dans le plan, trois points fixes, A, B et C, alignés, et la famille des cercles (Γ) passant par les points A et B. Soit I le milieu de l'un quelconque des arcs AB de ce cercle et soit M le second point commun à la droite CI et au cercle (Γ).
Déterminer l'ensemble des points M.

Exercice 1

On considère un cercle fixe, (I), de centre I, et un cercle variable, (ω), passant par deux points fixes, O et P, et coupant le cercle précédent en deux points, A et B.

Déterminer l'ensemble des points M du cercle (ω) tels que le faisceau O(A, B, M, P) soit harmonique.

Exercice 2

Soit, dans le plan complexe, A, B et M les points d'affixes respectives a, b et z.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\dfrac{z-a}{z-b}$ ait pour module 1 et pour argument $+\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 3

Déterminer les primitives de la fonction

$$y = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^x?$$

Exercice 1

On donne, sur une droite, trois points, O, I et A, dans cet ordre OI = R, OA = a.
Soit (Γ) le cercle de centre O passant par le point I et (C) un cercle variable passant par les points fixes O et A.

1. Démontrer que l'axe radical, (Δ), des cercles (Γ) et (C) pivote autour d'un point fixe.
2. Déterminer l'ensemble des pôles de la droite (Δ) par rapport au cercle (Γ).

Exercice 2

Déterminer la limite de

$$y = \frac{\mathrm{Log}\,(1+x)}{2x}$$

lorsque x tend vers zéro.

Exercice 1

On donne, dans un repère orthonormé, deux points, A et B, et l'on considère deux droites variables, (Δ) et $\left(\Delta'\right)$, passant respectivement par A et par B.
Supposant que les droites (Δ) et $\left(\Delta'\right)$ varient de telle façon que le produit de leurs coefficients directeurs soit constamment égal à un nombre relatif donné, k, déterminer l'ensemble des positions du point M, intersection de ces deux droites.
Discuter, suivant les valeurs de k.

Exercice 2

Déterminer les primitives de la fonction

$$y = \cos^2 x.$$

Exercice 3

Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$y = x^2 \operatorname{Log} x.$$