SOLUTION

Pierre Paro, 91 ans, butait sur cet énoncé « à en perdre le sommeil » lorsque son fils me l'a soumis, le 1er mai 2004. Je lui ai envoyé une solution, mais les réponses reçues de Michel BATAILLE (76-Rouen), Gaston BOUEZ (75-Paris), Marie-Laure CHAILLOUT (91-Épinay s/Orge), Christian DUFIS (87-Limoges), Michel HÉBRAUD (31-Toulouse), Pierre JULLIEN (13-Meyreuil), Georges LION (98-Wallis), René MANZONI (76-Le Havre), Joël PAYEN (93-Gagny) et Raymond RAYNAUD (04-Digne) rendent ce problème encore plus intéressant que je le pensais.

Devant la diversité des méthodes proposées, je ne sais trop par laquelle commencer ! La plus élémentaire est peut-être la suivante : si (Δ) est droite de Simson d'un point P, β et γ sont sur le cercle de diamètre [PA], γ et α sur le cercle de diamètre [PB], α et β sur le cercle de diamètre [PC]. D'où les égalités d'angles :

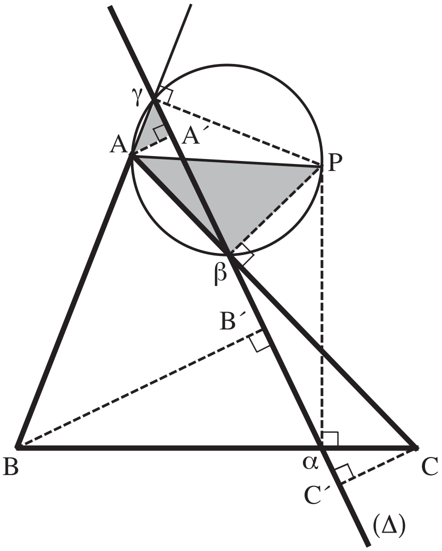
$$(\mathrm{PA}, \mathrm{P}\beta) = (\gamma\mathrm{A}, \Delta) = (\mathrm{PB}, \mathrm{P}\alpha),$$
$$(\mathrm{PB}, \mathrm{P}\gamma) = (\alpha\mathrm{B}, \Delta) = (\mathrm{PC}, \mathrm{P}\beta),$$

$$(\mathrm{PC}, \mathrm{P}\alpha) = (\beta\mathrm{C},\ \Delta) = (\mathrm{PA}, \mathrm{P}\gamma).$$

Les quatre triangles rectangles PAβ, γAA$'$, γBB$'$, PBα sont donc directement semblables, tout comme les quatre triangles PBγ, αBB$'$, αCC$'$, PCβ ainsi que les quatre triangles PCα, βCC$'$, βAA$'$, PAγ. Si l'on compose la similitude de centre P qui envoie β en A (ainsi que α en B) et la similitude de centre γ qui envoie A en A$'$ (ainsi que B en B$'$), on obtient donc une similitude d'angle nul et de rapport 1, c'est-à-dire une translation, qui envoie β en A$'$ et α en B$'$:

$$\overrightarrow{\beta \mathrm{A}'} + \overrightarrow{\beta\alpha} = \overrightarrow{\beta \mathrm{B}'}\ ,$$

ce qui prouve que [A$'\alpha$] et [B$'\beta$] ont même milieu. Et on démontre de même que [B$'\beta$] et [C$'\gamma$] ont même milieu, ainsi que [C$'\gamma$] et [A$'\alpha$].

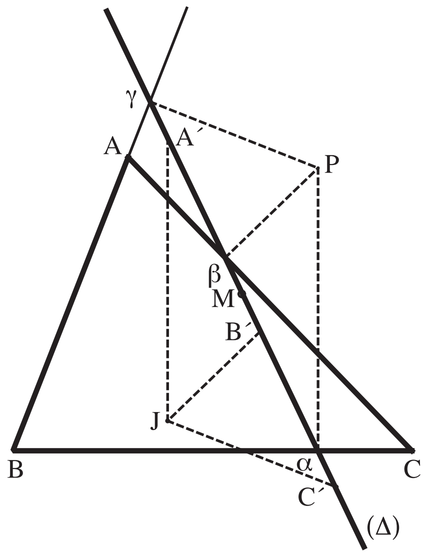


Si, réciproquement, ne fût-ce que deux de ces milieux coïncident, supposons par exemple que [A$'\alpha$] et [B$'\beta$] ont même milieu. Soit P le point où la perpendiculaire à (CA) en β coupe la perpendiculaire à (AB) en γ. En s'inspirant du raisonnement précédent, la translation qui envoie A$'$ en β est la composée de la similitude de centre γ qui envoie A$'$ en A (ainsi que B$'$ en B) et d'une similitude qui envoie A en β, de centre l'unique point P$'$ tel que P$'$Aβ soit directement semblable à γAA$'$, donc P$'$ = P. Puisque cette même translation envoie B$'$ en α, PBα est lui aussi directement semblable à γAA$'$, donc rectangle, et P se projette bien orthogonalement en α, β, γ sur (BC), (CA), (AB) respectivement, ce qui suffit à prouver que (Δ) est la droite de Simson de P.

D'ailleurs, Raymond Raynaud démontre, en écrivant les équations de droites dans un repère judicieux, que si deux des milieux coïncident, les trois coïncident. Il conviendrait de traiter séparément le cas où les points α, β, γ ne sont pas tous distincts – (Δ) est alors hauteur – ainsi que le cas problématique où (Δ) est l'un des côtés du triangle. D'autre part, plusieurs lecteurs ont été freinés par la question : suffit-il de prouver que les longueurs de βA$'$ et αB$'$ sont égales ? Raymond Raynaud « voit » dans tous les cas de figure que $\alpha\beta$ et A$'$B$'$ sont de sens contraires, mais cela semble délicat à Michel Bataille et fastidieux à Georges Lion. Ce problème des cas de figure, qui empoisonne encore la géométrie, provient seulement d'une mauvaise définition de la notion d'angle : prouver que les longueurs βA$'$ et αB$'$ sont égales, c'est perdre en route une information que l'on a du mal à récupérer par la suite (Michel Hébraud utilise, pour ce faire, le deuxième théorème de Desargues), un peu comme chercher la valeur absolue de la solution d'une équation du premier degré.

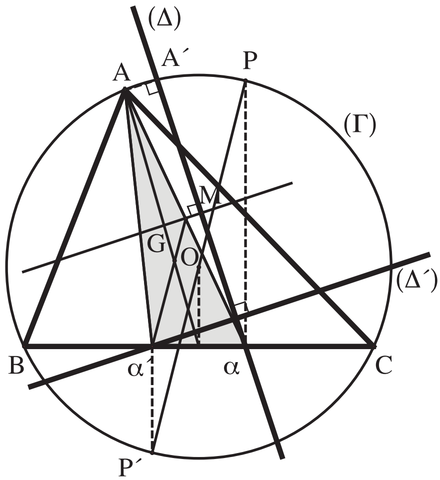
Michel Bataille fait appel à la notion d’orthopôle : pour tout point J du plan,

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{JA'}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{JB'}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{JC'}\cdot\overrightarrow{AB}\\&\quad=\overrightarrow{JA'}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\\&\qquad+\overrightarrow{A'B'}\cdot\left(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{A'A}\right)\\&\qquad+\overrightarrow{A'C'}\cdot\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B}\right)\\&\quad=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{A'B'}=0.\end{aligned}$$



Donc si les perpendiculaires à (BC) passant par A′ et à (CA) passant par B′ se coupent en J, (JC′) est perpendiculaire à (AB) : le point J à l’intersection de ces trois perpendiculaires s’appelle orthopôle de la droite (Δ). Si maintenant [A′α], [B′β] et [C′γ] ont même milieu M, la symétrie par rapport à M transforme l’orthopôle J en un point P, et les droites (JA′), (JB′) et (JC′) en (Pα), (Pβ), (Pγ) : P se projette orthogonalement sur (BC), (CA), (AB) en les trois points α, β et γ, alignés sur (Δ), donc (Δ) est droite de Simson de P.

Dans l’autre sens, la démonstration est moins immédiate… Alors pourquoi ne pas se contenter de l’idée de Marie-Laure Chaillout ? Si (Δ) est droite de Simson d’un point P, le point diamétralement opposé à P, P′, a une droite de Simson (Δ′) perpendiculaire à (Δ). En effet, en utilisant le cercle de diamètre [PC], qui passe par α et β, il est clair que



$$(BC,\Delta)=\frac{\pi}{2}+(CP,CA)$$

– d’ailleurs, Raymond Raynaud en déduit ce qu’il appelle le théorème des trois cosinus –. Or si (Δ′) coupe (BC), (CA), (AB) en α', β', γ', O, milieu de [PP′], se projette sur (BC) en le milieu de [$\alpha\alpha'$], qui coïncide donc avec le milieu de [BC]. Dès lors, les triangles ABC et A$\alpha\alpha'$ ont en commun la médiane issue de A, ils ont donc même centre de gravité G, tout comme B$\beta\beta'$ et C$\gamma\gamma'$. L’homothétie de centre G et de rapport (–1/2) transforme α', β', γ' en les milieux de [Aα], [Bβ], [Cγ] : ces trois milieux sont alignés sur une parallèle à (Δ′), ils se projettent donc sur (Δ) en un même point M, milieu commun de [A′α], [B′β], [C′γ].

Le calcul par les complexes, proposé par Raymond Raynaud et Gaston Bouez, n'est pas démesuré, au moins dans un des deux sens. Si les affixes a, b, c de A, B et C ont pour module 1, la droite AB a pour équation :

$$z + ab\overline{z} = a + b,$$

et la perpendiculaire à cette droite passant par P, d'affixe p :

$$z - ab\overline{z} = p - ab\overline{p}.$$

P se projette donc sur (AB) en γ :

$$\frac{a + b + p - ab\overline{p}}{2},$$

et sur AC en β :

$$\frac{a + c + p - ac\overline{p}}{2}.$$

La droite $(\beta\gamma)$ étant parallèle à $u = (c - b)(1 - a\overline{p})$ qui vérifie, si $|p| = 1$, $u = (abc\overline{p})\overline{u}$ (car $cb(\overline{c} - \overline{b})a\overline{p}(1 - \overline{a}p) = (b - c)(a\overline{p} - 1)$), la droite de Simson (Δ) a pour équation :

$$z - (abc\overline{p})\overline{z} = \left(\frac{h + p}{2}\right) - abc\overline{p}\left(\frac{\overline{h} + \overline{p}}{2}\right),$$

où $h = a + b + c$ est l'affixe de l'orthocentre H de ABC (HA, d'affixe $b + c$, est orthogonal à BC, d'affixe $b - c$). Donc (Δ) passe par le milieu de [HP]. La perpendiculaire à (Δ) menée par C, d'équation :

$$z + (abc\overline{p})\overline{z} = c + ab\overline{p},$$

la coupe en C′, d'affixe

$$\left(\frac{h + p}{4}\right) - abc\overline{p}\left(\frac{\overline{h} + \overline{p}}{4}\right) + \left(\frac{c + ab\overline{p}}{2}\right),$$

et le milieu de $[\mathrm{C}'\gamma]$:

$$3\left(\frac{h + p}{8}\right) - abc\overline{p}\left(\frac{\overline{h} + \overline{p}}{8}\right),$$

s'exprime symétriquement en fonction de a, b, c. On remarquera tout au long d'un tel calcul l'homogénéité angulaire des relations, qui permet d'éviter certaines erreurs : si l'on multiplie a, b, c, p, z par un même complexe t de module 1, les égalités sont conservées. Par ailleurs, pour que la droite de Simson soit perpendiculaire à (OP), d'équation $z - p^2\overline{z} = 0$, il faut et il suffit que $abc\overline{p} = -p^2$, soit $p^3 = -abc$.

Pour Christian Dufis, si (Δ) est droite de Simson de P, $(\mathrm{P}\beta)$ recoupe en U le cercle (Γ) circonscrit à ABC : à l'aide du cercle de diamètre [PC],

$$(\mathrm{BU}, \mathrm{BC}) = (\mathrm{PU}, \mathrm{PC}) = (\alpha\beta, \alpha\mathrm{C}),$$

donc (BU) est parallèle à (Δ). Or ce (BU) coupe (AA′) en V : à l'aide du cercle de diamètre [AU],

$(V\beta, VU) = (A\beta, AU) = (BC, BU)$, donc $(V\beta)$ est parallèle à (BC). Dès lors, BVA′B′ est un rectangle et $BV\beta\alpha$ un parallélogramme :

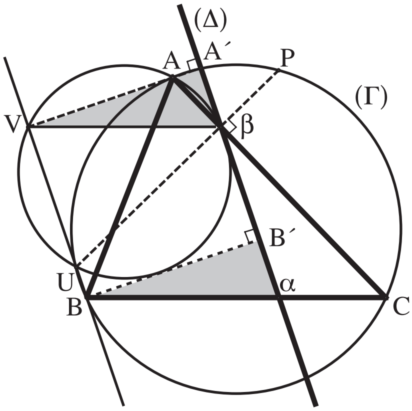
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{VB} = \overrightarrow{\beta\alpha}\,.$$

Réciproquement, si

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\beta\alpha}\,,$$

la parallèle en B à (Δ) coupe (AA′) en V et recoupe (Γ) en U : BVA′B′ est un rectangle, donc

$$\overrightarrow{VB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\beta\alpha}$$



d'où $BV\beta\alpha$ est un parallélogramme et

$$(V\beta, VU) = (BC, BU) = (A\beta, AU),$$

ce qui entraîne que U, V, A et β sont cocycliques, donc $(U\beta)$ perpendiculaire à (AC). Si $(U\beta)$ coupe en P la perpendiculaire en α à (BC),

$$(PU, PC) = (\alpha\beta, \alpha C) = (BU, BC),$$

dés lors P est sur (Γ) et il admet une droite de Simson, en l'occurence (Δ).

N'oublions pas les coniques, chères à Georges Lion qui écrit : « Soit $\mathcal{F}$ le pinceau formé par les coniques passant par A, B, C, ayant pour direction asymptotique (Δ′) perpendiculaire à (Δ). Les coniques décomposées de $\mathcal{F}$ sont (AA′) ∪ (BC), (BB′) ∪ (CA) et (CC′) ∪ (AB). D'après le théorème de Désargues-Sturm (Deltheil-Caire, p. 249), il existe une involution φ sur (Δ) qui échange entre eux les points d'intersection de (Δ) avec toute conique de $\mathcal{F}$. En particulier, on a :

$$\varphi(\alpha) = A',\ \varphi(\beta) = B' \text{ et } \varphi(\gamma) = C'.$$

Pour que φ soit la symétrie par rapport à un point M, il faut et il suffit que le point à l'infini de (Δ) soit fixe pour φ, c'est-à-dire que (Δ) soit asymptote à la conique de $\mathcal{F}$ ayant (Δ) pour direction asymptotique ». Celle-ci étant une hyperbole équilatère $(\mathcal{H})$, le point D diamétralement opposé sur $(\mathcal{H})$ à l'orthocentre H de ABC appartient au cercle circonscrit (Γ). Dès lors, si (Δ) est droite de Simson de P, (DP) est parallèle à (Δ), car

$$(\Delta, DA) = (HA, \Delta) = (CP, CA) = (DP, DA),$$

donc (Δ), qui passe par le milieu de [HP], passe bien par le centre de $(\mathcal{H})$. Réciproquement, si $[A'\alpha]$, $[B'\beta]$ et $[C'\gamma]$ ont même milieu, (Δ) est asymptote de $(\mathcal{H})$, or l'unique droite de Simson de direction (Δ) est elle aussi asymptote de $(\mathcal{H})$.

Même sans cette érudition, il me semble important de remarquer que $[A'\alpha]$, $[B'\beta]$ et $[C'\gamma]$ ont même milieu si et seulement si (Δ) est asymptote d'une hyperbole équilatère passant par A, B, C. Dans toute direction, en effet, il existe une et une seule de ces asymptotes : il est facile de la positionner en résolvant un système du type

$$(x_A - u)(y_A - v) = (x_B - u)(y_B - v) = (x_C - u)(y_C - v).$$

Donc si A, B et C sont non alignés et si (Δ) n'est ni parallèle ni perpendiculaire à aucun des trois côtés du triangle, il existe un repère orthonormé (pas nécessairement direct) où A, B et C ont pour coordonnées $\left(a,\frac{1}{a}\right)$, $\left(b,\frac{1}{b}\right)$, $\left(c,\frac{1}{c}\right)$ et (Δ) pour équation : $y = k$. La droite (AB), d'équation $x + aby = a + b$, coupe (Δ) en γ : $(a+b-kab, k)$, et il est clair que les milieux de $[A'\alpha]$, $[B'\beta]$ et $[C'\gamma]$ sont confondus si et seulement si $k = 0$. Or ces asymptotes, ce sont précisément les droites de Simson du triangle ABC, car la perpendiculaire en γ à (AB), d'équation :

$$x-\frac{y}{ab}=a+b-kab-\frac{k}{ab},$$

coupe la perpendiculaire en β à (AC), d'équation :

$$x-\frac{y}{ac}=a+c-kac-\frac{k}{ac},$$

en un point d'ordonnée : $abc - ka^2bc + k$. Les trois intersections ainsi définies sont confondues si et seulement si $k = 0$.

Cela permet d'envisager les droites de Simson sous un autre jour, car toute hyperbole équilatère passant par trois points A, B et C passe par l'orthocentre H du triangle ABC. En effet, si A, B et C sont sur l'hyperbole $xy = 1$, soit H $\left(h,\frac{1}{h}\right)$ le point de la même hyperbole vérifiant : $abch = -1$. L'équation de la hauteur issue de A,

$$x-\frac{y}{bc}=a-\frac{1}{abc},$$

peut s'écrire :

$$x + ahy = a + h,$$

ce qui n'est autre que l'équation de (AH). Dès lors, les asymptotes de ces hyperboles équilatères sont liées non pas au triangle ABC, mais au quadrangle orthocentrique ABCH, et il en va de même des droites de Simson : toute droite de Simson relativement à ABC est droite de Simson relativement à ABH, BHC et HCA. En fait, il s'agit des droites joignant un point N du cercle d'Euler à son isogonal par rapport au triangle orthique $L_1L_2L_3$, en posant $L_1 = (AH) \cap (BC)$, $L_2 = (BH) \cap (CA)$ et $L_3 = (CH) \cap (AB)$. Cet isogonal est donc le point à l'infini de (Δ), alors que l'isogonal de P par rapport à ABC est le point à l'infini perpendiculaire à (Δ). Plus généralement, pour chacun des quatre triangles, par exemple ABC, l'homothétie σ_H de centre le quatrième point (l'orthocentre) H et de rapport 2 (qui transforme le cercle d'Euler en le cercle (Γ_H) circonscrit à ABC) transforme ce même point N en P_H dont (Δ) est droite de Simson relativement à ABC.

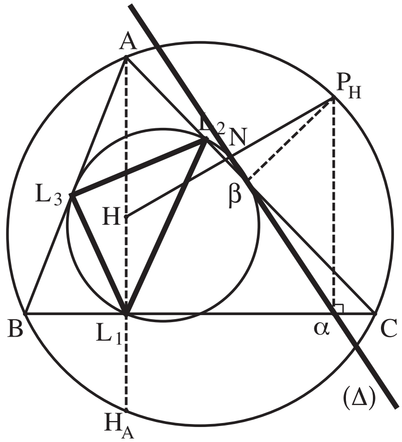
Le fait que, si (Δ) est droite de Simson de P_H, l'isogonal de N, milieu de HP_H, par rapport au triangle orthique $L_1L_2L_3$ est le point à l'infini de (Δ) se démontre en remarquant que σ_H transforme le triangle orthique $L_1L_2L_3$ en un triangle $H_AH_BH_C$, inscrit dans (Γ_H), donc :

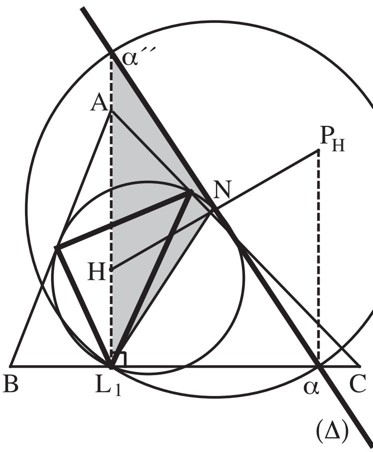
$$\begin{aligned}(H_AP_H, H_AA) &= (CP_H, CA)\\ &= \frac{\pi}{2} + (BC, \Delta)\\ &= (H_AA, \Delta),\end{aligned}$$

or (H_AP_H) est parallèle à (L_1N) et $(H_AA) = (L_1H)$ bissectrice du triangle orthique. Inversement, (Δ) étant définie comme la droite reliant N à son isogonal relativement à $L_1L_2L_3$, appelons α et α'' (désolé pour les notations, je n'ai pas trouvé mieux…) les intersections de (Δ) avec (BC) et (AH). L'isogonalité entraîne

$$(AH, L_1N) = (\Delta, AH),$$

donc $\alpha''NL_1$ est isocèle : L_1 est sur le cercle de centre N passant par α''. (BC), perpendiculaire en L_1 à $(L_1\alpha'')$, recoupe ce cercle en le point diamétralement opposé à α'', qui appartient donc à $(\alpha''N)$, soit (Δ), et ne peut être que α. Dès lors, la symétrie par rapport à N transforme $(H\alpha'')$ en $(P_H\alpha)$: toutes deux sont perpendiculaires à (BC), ce qui prouve que α est la projection orthogonale de P_H sur (BC).





Par ailleurs, cette droite de Simson recoupe le cercle d'Euler en un point Q, centre de l'hyperbole $(\mathcal{H})$, et l'homothétie σ_H transforme Q en D_H, quatrième point d'intersection de $(\mathcal{H})$ avec (Γ_H). En effet, du fait de l'isogonalité, le point N′ diamétralement opposé à N définit une droite de Simson (Δ') perpendiculaire à (Δ), et ces deux droites, asymptotes de la même hyperbole équilatère, se coupent au centre Q de l'hyperbole, sur le cercle de diamètre NN′. Lorsque N parcourt un tour du cercle d'Euler, (Δ) tourne de 180° dans l'autre sens, Q parcourt donc deux tours du cercle d'Euler en sens opposé à N, et les deux points se croisent trois fois, aux trois points où l'enveloppe des droites de Simson, l'hypocycloïde de Steiner, est tangente au cercle d'Euler, la droite de Simson étant alors perpendiculaire au rayon (O′N).

En fin de compte, la propriété définitoire classique des droites de Simson n'est peut-être qu'une propriété accessoire de ces droites.