La plupart des lecteurs utilise les séries (sommes géométriques et dérivées) pour les calculs. Suivant **Georges Lion**, on désigne respectivement le bon, la brute et le truand par les lettres B, b, T .

Le triplet (B, b, T) étant donné, les issues possibles sont (B, b, T), (B, T), (b, T) et T avec les probabilités respectives

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}.$$

Détaillons par exemple les trois premières probabilités, ce qui donnera automatiquement la valeur de la dernière. En présence des trois protagonistes, le bon vise la brute (son adversaire le plus dangereux), tandis que la brute et le truand visent le bon. Pour que les trois acteurs restent vivants, il faut que le bon rate la brute mais aussi que la brute et le truand ratent le bon. Ainsi,

$$p\left((\mathrm{B}, b, \mathrm{T}) \to (\mathrm{B}, b, \mathrm{T})\right) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

Pour que ne survivent que le bon et le truand, il faut que le tir du bon atteigne la brute et que la brute et le truand visent mal le bon. Donc

$$p\left(\left(\mathrm{B}, b, \mathrm{T}\right) \to \left(\mathrm{B}, \mathrm{T}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}.$$

Pour que ne survivent que la brute et le truand, il faut que le bon rate la brute et que la brute ou le truand atteigne le bon. Donc

$$p\left(\left(\mathrm{B}, b, \mathrm{T}\right) \to \left(b, \mathrm{T}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}.$$

On laisse au lecteur le soin de détailler les calculs ci-dessous :

le couple (B, T) étant donné, les issues possibles sont (B, T), B, T, $\varnothing$ avec les probabilités respectives

$$\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9};$$

tandis que le couple (b, T) étant donné, les issues possibles sont (b, T), b, T, $\varnothing$ avec les probabilités respectives

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}.$$

On en déduit le graphe probabiliste suivant :

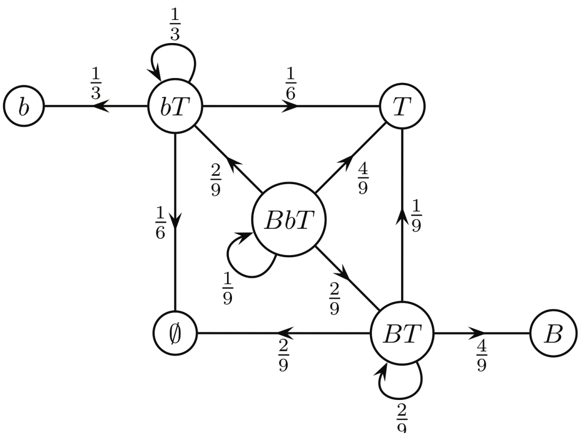

FIGURE 1 – Graphe probabiliste.

Calculons maintenant la probabilité pour chacun d'être le seul survivant du combat. On commence par le bon. Tant que le bon et la brute sont présents, personne ne tire sur le truand. Le bon doit d'abord éliminer la brute, puis le truand. On doit nécessairement passer de l'état (B, b, T) à (B, T) (en stationnant autant qu'on le souhaite sur l'état (B, b, T)), puis passer de l'état (B, T) à B (en stationnant autant qu'on le souhaite sur l'état (B, T)). Ainsi,

$$p(\mathrm{B}) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^m\right)\times\frac{2}{9}\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\times\frac{4}{9}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{9}}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{1-\frac{2}{9}}\times\frac{4}{9}$$
$$= \frac{9}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{9}{7}\times\frac{4}{9} = \frac{1}{7}.$$

On calcule ensuite la probabilité que la brute soit le seul survivant du combat. On doit passer de l'état (B, b, T) à (b, T) puis de l'état (b, T) à b. Ainsi,

$$p(b) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^m\right)\times\frac{2}{9}\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\times\frac{1}{3}$$
$$= \frac{9}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{8}.$$

Pour le truand, la situation est plus compliquée. On peut passer de l'état (B, b, T) à (B, T) puis de l'état (B, T) à T, mais on peut aussi passer de l'état (B, b, T) à (b, T) puis de l'état (b, T) à T ou encore passer de l'état (B, b, T) à T . Ainsi,

$$p(\mathrm{T}) = \frac{9}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{9}{7}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{8}\times\frac{4}{9}$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{28}+\frac{1}{16} = \frac{67}{112}.$$

Par conséquent, la probabilité qu'il ne reste aucun survivant est

$$p(\varnothing) = 1-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{67}{112}\right) = \frac{15}{112}.$$

Pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que le combat dure k rounds est égale à

$$\frac{4}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}+\frac{2}{9}\sum_{p=0}^{k-2}\frac{1}{9^p}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^{k-2-p}\times\left(1-\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2-p}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\right],$$

soit encore

$$\frac{4}{9}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}+\frac{14}{9^k}\left(2^{k-1}-1\right)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{9^{k-1}}\times\left(3^{k-1}-1\right).$$

Pour conclure, on calcule l'espérance mathématique du nombre de rounds. Pour $0 < r < 1$, on rappelle les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kr^{k-1} = \frac{2r-r^2}{(1-r)^2}.$$

On en déduit aussitôt

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k}{9} \times \frac{1}{9^{k-1}} = \frac{4}{9} \times \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{14k}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} = \frac{14}{9} \times \frac{32}{49} = \frac{64}{63},$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{14k}{9} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} = \frac{119}{288},$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{5}{6},$$

puis

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k}{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} = \frac{17}{96}$$

Ainsi, la moyenne des nombres de rounds est

$$\frac{9}{16} + \frac{64}{63} - \frac{119}{288} + \frac{5}{6} - \frac{17}{96} = \frac{51}{28} = 1{,}8214\ldots$$

L'entier le plus proche est 2 (par excès). On peut donc s'attendre à ce que le combat dure deux rounds.