Quelques commentaires sur ce problème.

(1) En discernant de nombreux états intermédiaires dans le combat, **Pierre Renfer** arrive à calculer les probabilités souhaitées sans aucune somme géométrique.

(2) L'auteur de ce problème, **Louis-Marie Bonneval**, propose d'autres approches. L'une d'elle utilise la matrice stochastique

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont il faut calculer les puissances. Une décomposition par blocs permet ce calcul. Ce calcul matriciel masque en réalité le passage par les séries géométriques et leurs dérivées. Cette approche est également proposée par **François Couloigner**, qui traite les calculs avec le logiciel de calcul formel Maxima et propose une simulation avec le logiciel Python.

(3) Comme la plupart des lecteurs, **Louis-Marie Bonneval** commente l'exercice : le truand, moins habile que les autres, a beaucoup plus de chances qu'eux de gagner le combat. C'est qu'il bénéficie de leur affrontement : il a déjà 44% de chance de gagner dès le premier round, où il n'est pas visé.

(4) Enfin, **Laurent Chéno** propose une démonstration élémentaire (sans dérivation) de l'égalité suivante, valable pour $|a| < 1$:

$$\sum_{n\geq 0} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Si S_N désigne la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} na^n,$$

un petit calcul montre que

$$(1-2a+a^2)S_N = a + a^{N+1}\left(Na^2-(N+1)a\right).$$

Un passage à la limite permet de conclure.