Solutions de Jean-François Mallordy (Romagnat), Giovanni Ranieri (Melun), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Jean-François Mallordy commence par déterminer la raison de la progression arithmétique. Soit $n > 6$ tels que les éléments de $\mathrm{P}(n)$ soient en progression arithmétique de raison δ. L'entier δ divise $n - 2$ puisque 1 et $n - 1$ appartiennent à $\mathrm{P}(n)$. On va montrer que $\delta = 1$ ou 2.

Si 3 ne divise pas n, les entiers 1 et 3 sont dans $\mathrm{P}(n)$, donc δ divise $3 - 1 = 2$. Si 3 divise n, on note $n = 3n'$ et l'on distingue deux cas, selon que 3 divise ou non $n' + 1$. Si 3 ne divise pas $n' + 1$, alors $n' + 1$ est premier avec 3 et n', donc avec $3n' = n$. Ainsi, $n' + 1$ appartient à $\mathrm{P}(n)$ et divise n'. Donc δ divise $3n' - (n - 2) = 2$. Dans le second cas, si 3 divise $n' + 1$, alors 3 ne divise pas $n' - 1$. Ainsi, $n' - 1$, qui est premier avec 3 et n', appartient à $\mathrm{P}(n)$ et δ divise $n' - 2$ et aussi $(n - 2) - 3(n' - 2) = 4$. Le cas $\delta = 4$ est exclu car si $\delta = 4$, alors $9 = 1 + 2 \times 4$ appartient à $\mathrm{P}(n)$ (on a bien $9 \leq n - 1$), ce qui est absurde puisque 3 divise 9 et n.

Finalement, δ divise 2 donc $\delta = 1$ ou 2. Si $\delta = 1$, n est premier. Si $\delta = 2$, $\mathrm{P}(n) = \{1, 3, 5, \ldots, n - 1\}$, donc n n'a aucun diviseur premier impair, donc n est une puissance de 2.

Réciproquement, si n est premier ou est une puissance de 2, les éléments de $\mathrm{P}(n)$ sont bien en progression arithmétique.

Dans une autre approche, **Pierre Renfer** trouve les deux solutions évidentes (n est premier ou n est une puissance de 2), puis montre que ces solutions sont les seules. Il suppose que $n > 7$ n'est ni premier, ni une puissance de 2. Il écrit alors $n = 2^\alpha m$ et montre que n n'est pas solution, en distinguant trois cas possibles.

Si $\alpha = 0$, alors $m = n$ n'est pas premier, donc est divisible par un facteur premier p strictement inférieur à n. Ainsi, $\mathrm{P}(n)$ contient 1 et 2, mais aussi $n - 1$ qui est strictement plus grand que p. Pourtant, $\mathrm{P}(n)$ ne contient pas p.

Si $\alpha \geq 1$ et $m \geq 5$, alors $\mathrm{P}(n)$ contient $m - 4$, $m - 2$, et $n - 1 > m$, mais ne contient pas m.

Enfin, si $\alpha \geq 2$ et $m = 3$, alors $\mathrm{P}(n)$ contient 5 et 7 et $n - 1 > 9$, mais ne contient pas 9.

Enfin, **Giovanni Ranieri** fait l'étude suivante, en distinguant également trois cas.

Si n est impair, 2 appartient à $\mathrm{P}(n)$ donc $\mathrm{P}(n) = [[1, n - 1]]$ et n est premier.

Si n est pair et premier avec 3, $\mathrm{P}(n) = \{1, 3, \dots, n - 1\}$ et alors n est une puissance de 2. En effet, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2^\alpha m$ où m est impair. Comme m appartient à $\{1, 3, \dots, n - 1\}$, m est dans $\mathrm{P}(n)$ donc $1 = m \wedge n = m$ et $n = 2^\alpha$.

Enfin, reste le cas où n est divisible par 6. On écrit alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times n'$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ et l'entier n' est premier avec 6. On note $\boldsymbol{p}$ le plus petit nombre premier ne divisant par n. Ainsi,

$$\mathrm{P}(n) = \{1, p, 2p - 1, \dots, k(p - 1) + 1 = n - 1\},$$

où $k = \varphi(n) - 1$ et φ est l'indicatrice d'Euler. L'examen du dernier terme donne la relation

$$k(p - 1) = 2^\alpha \times 3^\beta \times n' - 2. \tag{3}$$

On pose alors $p - 1 = 2^\gamma \times m'$, où m' est impair et γ est strictement positif. La relation (3) donne

$$2^{\gamma-1} k m' = 2^{\alpha-1} \times 3^\beta \times n' - 1.$$

Si $m' > 1$, alors un diviseur premier p' de m' vérifie

$$2 \wedge p' = 1, 3 \wedge p' = 1, n' \wedge p' = 1$$

donc

$$p' \wedge n = 1,$$

et $p' < p$, ce qui contredit la minimalité de p. Ainsi, $m' = 1$ et $p = 2^\gamma + 1$.

Si γ est pair, comme $\mathrm{P}(n)$ contient au moins trois termes ($\varphi(n) = 2$ supposerait n premier), le troisième terme de $\mathrm{P}(n)$ est

$$2 \times 2^\gamma + 1 \equiv 0 \bmod 3,$$

ce qui est impossible puisque 3 n'appartient pas à $\mathrm{P}(n)$.

Si γ est impair, le second terme de $\mathrm{P}(n)$ est

$$2^\gamma + 1 \equiv 0 \bmod 3,$$

ce qui aboutit à la même contradiction. Ainsi, dans le troisième cas, $\mathrm{P}(n)$ n'est pas en progression arithmétique.