Pierre Renfer utilise la multiplicativité de la fonction σ: pour deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, on a la relation

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b).$$

En effet, tout diviseur d de ab s'écrit de manière unique $d = uv$, où u est un diviseur de a et v un diviseur de b. Ainsi, en notant $x \mid y$ la relation x divise y.

$$\sigma(ab) = \sum_{d|ab} d = \sum_{u|a} \sum_{v|b} uv = \sigma(a)\sigma(b)$$

Soit alors un entier n divisible par 24. Ainsi, $n - 1$ est congru à -1 modulo 3. Dans la décomposition de $n - 1$ en facteurs primaires, figure au moins un facteur p^α, où p est un facteur premier congru à -1 modulo 3 et où α est une puissance impaire. Dans la somme

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha,$$

les termes, en nombre pair, sont alternativement congrus à 1 et -1 modulo 3. Donc $\sigma(p^\alpha)$ est divisible par 3 et il en est de même de $\sigma(n-1)$. Reste alors à montrer que $\sigma(n-1)$ est divisible par 8.

Puisque n est divisible par 24, l'entier $n - 1$ est congru à -1 modulo 8. Donc, dans la décomposition de $n - 1$ en facteurs primaires, figure

– ou bien un facteur p^α, où p est un nombre premier congru à -1 modulo 8 et α est une puissance impaire,
– ou bien deux facteurs p^α et q^β, où p et q sont des nombres premiers congrus respectivement à 3 et 5 modulo 8 et α et β sont des puissances impaires.

Dans le premier cas, dans la somme

$$\sigma\left(p^\alpha\right) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha$$

les termes, en nombre pair, sont alternativement congrus à 1 et -1 modulo 8, donc $\sigma\left(p^\alpha\right)$ est divisible par 8 et $\sigma(n-1)$ aussi.

Dans le second cas, dans la somme

$$\sigma\left(p^\alpha\right) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha$$

les termes, en nombre pair, sont alternativement congrus à 1 et -1 modulo 4, donc $\sigma\left(p^\alpha\right)$ est divisible par 4. Et la somme

$$\sigma\left(q^\beta\right) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^\beta$$

est divisible par 2 puisqu'elle contient un nombre pair de termes impairs. Donc le produit $\sigma\left(p^\alpha\right)\sigma\left(q^\beta\right)$ est divisible par 8. Là encore, $\sigma(n-1)$ est divisible par 8, ce qui conclut.

Dans une toute autre approche, **Jean-Claude Carréga**, **Bernard Collignon**, **Jean-Philippe Mouton-Mazerand**, **Joël Payen** et **Xavier Reliquet** proposent l'idée essentielle de regrouper les diviseurs de $n - 1$ par paires dont la somme est divisible par 24. Les idées proposées sont relativement les mêmes. Voici par exemple celle, plus synthétique, de **Jean-Claude Carréga**.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier divisible par 24. Si un entier naturel x est un diviseur de $n - 1$, il existe un unique diviseur y de $n - 1$ tel que $xy = n - 1$. Les diviseurs x et y sont différents, sinon la relation $n - 1 = x^2$ ferait de -1 un carré modulo 3, ce qui n'est pas le cas. On peut donc regrouper les diviseurs de $n - 1$ par paire $\{x, y\}$ avec $x \neq y$ et $xy = n - 1$. En notant $\{x_1, y_1\}$, … , $\{x_k, y_k\}$ les différentes paires, on obtient

$$\sigma(n-1) = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i + y_i\right).$$

Si l'on montre que chaque somme $x_i + y_i$ est divisible par 24, le problème est résolu.

Il s'agit maintenant de montrer que, pour $x, y \in \mathbb{Z}$, si $\overline{xy} = -1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, alors $\bar{x} + \bar{y} = 0$. Or la relation $\overline{xy} = -1$ impose à $\bar{x}$ d'être une des unités de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Les unités de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ sont les suivantes :

$$\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}.$$

Elles vérifient toutes $\bar{x}^2 = 1$ donc $\bar{x}^{-1} = \bar{x}$. Ainsi, si $\bar{x}$, $\bar{y}$ vérifient la relation

$$\overline{xy} = -1$$

alors

$$\bar{y} = -\bar{x}^{-1} = -\bar{x}$$

et donc

$$\bar{x} + \bar{y} = 0.$$