Solution de Georges Lion (Wallis)

(1) La perpendiculaire à (AB) menée par M et les bissectrices extérieures des angles $\widehat{BAA'}$ et $\widehat{ABB'}$ sont concourantes en vertu de la relation énoncée en hypothèse. D'où le cercle Γ.
Il existe une affinité $\mathcal{A}$ d'axe (AB) telle que $\mathcal{A}(C) = O$ et $\mathcal{A}(\Gamma) = E$ (FIGURE 2).

(2) L'affinité $\mathcal{A}$ préserve la longueur des segments parallèles à (AB) tandis qu'elle multiplie par $\dfrac{d}{R}$ la longueur des segments perpendiculaires à (AB). À l'aide des aires de l'ellipse et du cercle, on en déduit les relations suivantes :

$$\pi ab = \frac{d}{R}\pi R^2,$$

d'où $ab = dR$.

Soit S (respectivement S′) les projetés de F (respectivement F′) sur (AB) et I le milieu de [SS′]. Il est bien connu que $OS = OS' = a$ et $\widehat{FMS} = \widehat{F'MS'}$. On en déduit, par produit, les relations suivantes :

$$\frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{SF}} = \frac{\mathrm{MS}'}{\mathrm{S}'\mathrm{F}'} = \frac{\mathrm{MS} + \mathrm{MS}'}{\mathrm{SF} + \mathrm{S}'\mathrm{F}'} = \frac{2\sqrt{a^2 - d^2}}{2d}$$

et

$$\frac{\mathrm{MS} \times \mathrm{MS}'}{\mathrm{SF} \times \mathrm{S}'\mathrm{F}'} = \frac{a^2 - d^2}{d^2}$$

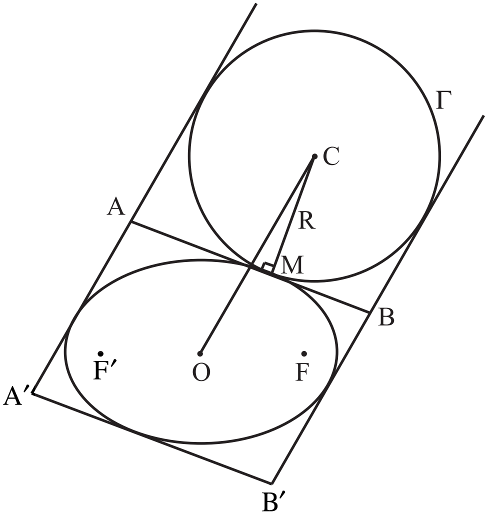

FIGURE 2

Par ailleurs, $\mathrm{MS} \times \mathrm{MS}' = a^2 - \mathrm{OM}^2$ et $\mathrm{SF} \times \mathrm{S}'\mathrm{F}' = a^2 - c^2 = b^2$ (puissances).

Donc $a^2 - \mathrm{OM}^2 = b^2\left(\dfrac{a^2 - d^2}{d^2}\right) = \mathrm{R}^2 - b^2$.

Finalement,

$$a^2 + b^2 + 2ab = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}d + d^2 + \mathrm{IM}^2 = (\mathrm{R} + d)^2 + \mathrm{IM}^2$$

c'est-à-dire que $a + b = \mathrm{OC}$ (FIGURE 3).

La question suivante est évidente lorsque (FF′) est parallèle à (AB). Sinon, soit J l'intersection de (AB) avec (FF′). Le pinceau (MD, MJ, MF, MF′) est harmonique, donc MD est la moyenne harmonique de SF et S′F′ :

$$\frac{2}{\mathrm{MD}} = \frac{1}{\mathrm{SF}} + \frac{1}{\mathrm{S}'\mathrm{F}'} = \frac{\mathrm{S}'\mathrm{F}' + \mathrm{SF}}{\mathrm{S}'\mathrm{F}' \times \mathrm{SF}} = \frac{2\mathrm{IO}}{b^2}$$

d'où

$$r = \frac{b^2}{d}$$

et

$$\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{b^2}{d\mathrm{R}} = \frac{b^2}{ab} = \frac{b}{a}.$$

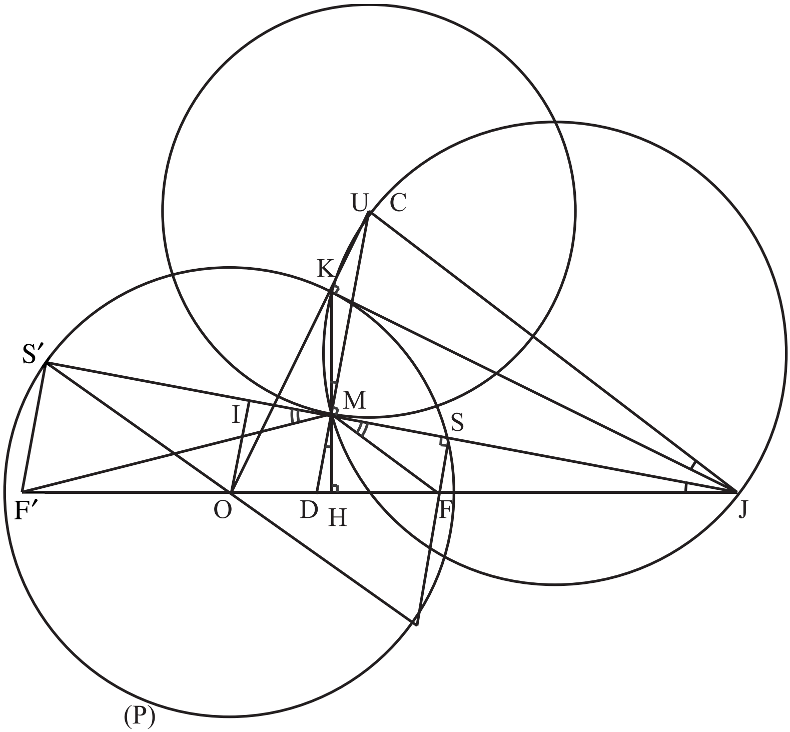

FIGURE 3

(3) Une affinité orthogonale d'axe (FF′) envoie le cercle P sur E, ainsi (JK) est perpendiculaire à (OK). Soit H le projeté de M sur (FF′), U l'intersection de (DM) et de (KO). Les triangles UKJ et DHM sont semblables, donc

$$\frac{\mathrm{UJ}}{\mathrm{KJ}} = \frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{HM}}$$

Les triangles KHJ et UMJ sont semblables, donc

$$\frac{\mathrm{UJ}}{\mathrm{KJ}} = \frac{\mathrm{UM}}{\mathrm{KH}}$$

Finalement,

$$\frac{\mathrm{UM}}{\mathrm{DM}} = \frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{HM}} = \frac{a}{b} = \frac{\mathrm{CM}}{r}$$

et

$$\mathrm{UM} = \mathrm{CM}.$$

(4) Application : la connaissance de ABB′A′ et de M permet de construire le cercle Γ. Connaissant $a + b$ et ab, des constructions classiques donnent la longueur a. On peut alors tracer le cercle (P) qui coupe en K la droite (OC). La droite (KM) donne la direction du petit axe de E