Il est tentant de passer en coordonnées polaires, avec des coordonnées (ρ,θ) de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui peut poser un problème lorsque le point est à l'origine. Dans la suite de ce texte, on supposera donc que l'on peut écrire

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = \rho(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

avec ρ, $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ continues de classe $\mathcal{C}^1$. En omettant la variable t,

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

En dérivant,

$$\begin{cases} x' = \rho'\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\theta' \\ y' = \rho'\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)\theta' \end{cases}$$

Un calcul donne

$$\mathrm{E}(\Phi) = \int_0^1 \frac{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2\,\theta'(t)^2}{\left(1-\rho(t)^2\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\mathrm{E}(\Phi) \geq \int_0^1 \frac{\rho'(t)^2}{\left(1-\rho(t)^2\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathrm{E}(\Phi) \geq \left(\int_0^1 \frac{\rho'(t)}{1-\rho(t)^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \left(\int_0^1 \mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^1 \frac{\rho'(t)}{1-\rho(t)^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

soit

$$\mathrm{E}(\Phi) \geq \left(\left|\operatorname{argth}(\rho(t))\right|_0^1\right)^2 = \operatorname{argth}(\mathrm{OM}_0)^2.$$

Il y égalité si et seulement si d'une part $\theta' = 0$ et d'autre part s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela signifie que θ est constante (les courbes considérées sont des segments de droite) et que l'application $\dfrac{\rho'}{1-\rho^2}$ est également constante, autrement dit qu'il existe α tel que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\rho(t) = \operatorname{th}(\alpha t).$$

Et effectivement, pour φ, $\alpha \in \mathbb{R}$, en posant

$$\Phi(t) = \begin{cases} x(t) = \operatorname{th}(\alpha t)\cos(\varphi) \\ y(t) = \operatorname{th}(\alpha t)\sin(\varphi) \end{cases}$$

on vérifie facilement que

$$\mathrm{E}(\Phi) = \alpha^2.$$

Or

$$x(1)^2 + y(1)^2 = \operatorname{th}(\alpha)^2 = \mathrm{OM}_0{}^2,$$

donc $\alpha = \pm \operatorname{argth}(\mathrm{OM}_0)$, ce qui donne le minimum attendu.