Dans son énoncé initial, l'auteur de ce problème, **Pierre Renfer**, imaginait des ivrognes sortant d'une soirée bien arrosée. Mais j'ai transposé ce problème avec des lords sortant d'un pub, comme dans le classique problème du chapeau[(1)].

On numérote les lords de 1 à n et l'on définit une permutation σ de l'ensemble [[1, n]] en associant à chaque lord k le lord $\sigma(k)$ qui porte son chapeau. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de chenilles, qui est également le nombre de cycles à supports disjoints de la permutation σ.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[1, n]]$, on note $a(n, k)$ le nombre de permutations de $[[1, n]]$ possédant k cycles à supports disjoints. Alors

$$P\left(X_n = k\right) = \frac{a(n,k)}{n!}.$$

Pour $n \geq 2$ et $k \geq 1$,

$$a(n,k) = a(n-1,k-1) + (n-1)a(n-1,k) \tag{1}$$

Le premier terme du second membre correspond au nombre de permutations σ admettant n pour point fixe et la restriction de σ à $[[1; n-1]]$ comporte alors $k-1$ cycles à supports disjoints. Si au contraire n n'est pas un point fixe de σ, on commence par choisir une permutation σ' de $[[1; n-1]]$ possédant k cycles à supports disjoints (ce qui donne $a(n-1, k)$ choix) puis l'on choisit l'image p de n (ce qui donne $n-1$ choix) et l'on intercale n devant p dans le cycle de σ' contenant p.

En divisant la relation (1) par $(n-1)!$ et en multipliant par k, on obtient

$$nk\,P\left(X_n = k\right) = k\,P\left(X_{n-1} = k-1\right) + (n-1)k\,P\left(X_{n-1} = k\right),$$

soit

$$nk\,P\left(X_n = k\right) = (k-1)P\left(X_{n-1} = k-1\right) + P\left(X_{n-1} = k-1\right) + (n-1)k\,P\left(X_{n-1} = k\right).$$

(1). Si chaque lord prend un chapeau au hasard, la probabilité qu'aucun lord ne reparte avec son chapeau tend vers $\frac{1}{n}$ quand le nombre de lords tend vers $+\infty$.

En sommant ces relations pour $k \in [[1; n]]$, on obtient

$$n\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + 1 + (n-1)\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}),$$

soit encore

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Sachant que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = 1$, on trouve que l'espérance cherchée est donnée par la série harmonique :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Pour la variance, on part de la relation (1) que l'on divise par $(n - 1)!$ et que l'on mutliplie par k^2 :

$$nk^2\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = (k-1)^2\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k-1) + 2(k-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k-1)$$
$$+\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k-1) + (n-1)k^2\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k).$$

En sommant ces relations pour $k \in [[1, n]]$, on obtient par le théorème de transfert,

$$n\mathrm{E}\left((\mathrm{X}_n)^2\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{X}_{n-1})^2\right) + 2\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + 1 + (n-1)\mathrm{E}\left((\mathrm{X}_{n-1})^2\right),$$

donc

$$\mathrm{E}\left((\mathrm{X}_n)^2\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{X}_{n-1})^2\right) + \frac{2}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n}. \tag{3}$$

En mettant la relation (2) au carré, on obtient

$$\left(\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)\right)^2 = \left(\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1})\right)^2 + \frac{2}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n^2}. \tag{4}$$

En soustrayant la relation (4) à la relation (3), on obtient

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{V}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

Sachant que $\mathrm{V}(\mathrm{X}_1) = 0$, on trouve

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Michel Lafond trouve la relation (2) entre les espérances en faisant un arbre de probabilités.

Pierre Carriquiry me signale l'article « Statistiques du nombre de cycles d'une permutation » de **Xavier Caruso** et **Igor Kortchemski**, paru dans la revue RMS volume 121 numéro 4 (2010-2011).