Une seule solution recue, de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Tout d'abord, le compact K ne peut être une réunion disjointe d'un nombre fini de fermés non vides. En effet, si $K = \bigcup_{n=1}^{N} K_n$, où chaque K_n est fermé, alors K serait la réunion disjointe de deux fermés, à savoir K_1 et $\bigcup_{n=2}^{N} K_n$, ce qui contredit la connexité de K.

Supposons alors que K est la réunion disjointe $\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ d'une famille dénombrable infinie $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fermés non vides. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la frontière K_n^* de K_n est non vide, car sinon un des K_n serait ouvert et fermé, différent du vide et de K, ce qui contredit la connexité de K.

Posons alors $F = \bigcup_{n=1}^{N} K_n^*$. C'est un fermé de $\mathbb{R}^n$ car c'est un fermé de K : son complémentaire dans K est une réunion d'ouverts de K, à savoir les intérieurs des K_n. Dans la suite, on parle de l'espace topologique F muni de sa topologie induite. Cet espace F est un espace complet. On peut donc lui appliquer le théorème de Baire : toute réunion dénombrable de fermés de F, d'intérieur vide, est encore d'intérieur vide.

Si l'on prouve que chaque K_n^* est un fermé de F, d'intérieur vide, on obtient la contradiction suivante : F est d'intérieur vide (dans F), donc est vide. Ainsi, chaque K_n^* est vide, donc chacun des K_n est ouvert et fermé, ce qui contredit la connexité de K.

Montrons donc que chaque K_n^* est un fermé de F d'intérieur vide. Que K_n^* soit un fermé de F est clair : c'est l'intersection de K_n et du complémentaire dans F de l'intérieur de K_n. Montrons qu'il est d'intérieur vide. Soit x un élément de K_n^*. Toute boule ouverte B de centre x dans K rencontre le complémentaire de K_n dans K donc contient un élément y appartenant à un certain K_m avec $m \neq n$. Comme K est connexe par arcs, il existe un chemin continu Γ reliant dans K les points x et y. Cet arc rencontre K_m^* en un point z, sinon Γ serait réunion disjointe des ouverts $\Gamma \cap (K - K_m^*)$ et $\Gamma \cap \overset{\circ}{K}_m$ (où $\overset{\circ}{K}_m$ désigne l'intérieur de K_m), ce qui contredirait la connexité de Γ. Le voisinage $B \cap F$ de x contient z, il n'est pas contenu dans K_n^*. Ainsi, K_n^* est bien d'intérieur vide.

Nota Bene : cet exercice trouve sa source dans le volume Topologie Générale, de **Nicolas Bourbaki** (chapitres 5 à 10), sous l'appellation « espace inépuisable » : un espace topologique est inépuisable s'il n'est pas réunion dénombrable de fermés non vides deux à deux disjointes. On trouve également dans le livre de Topologie de **Hervé Queffelec** l'exercice suivant : un espace topologique connexe, localement connexe, dont les fermés non vides sont des espaces de Baire, est un espace inépuisable. Cet exercice fut donné à l'oral d'ULM à un de mes anciens élèves, il y a environ 5 ans…