Ce sujet a été posé au Concours Général de Mathématiques de 1994. On commence par calculer quelques valeurs :

$$f(0) = f(0+0) = f(0)^2 + f(0)^2 = 2f(0)^2.$$

Et comme $f(0)$ est un entier, on en déduit que $f(0) = 0$. Puis

$$f(1) = f(1+0) = f(1)^2 + f(0)^2 = f(1)^2.$$

L'énoncé précise $f(1) > 0$, donc $f(1) = 1$. Et

$$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f(1)^2 + f(1)^2 = 2.$$

On remarque ensuite que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n^2) = f(n^2 + 0) = f(n)^2 + f(0)^2 = f(n)^2.$$

$$f(n^2 + 1) = f(n)^2 + f(1)^2 = f(n)^2 + 1.$$

et

$$f(2n^2) = f(n^2 + n^2) = 2f(n)^2.$$

En prenant $n = 2$ dans ces trois formules, on obtient

$$f(4) = f(2)^2 = 4.$$

$$f(5) = f\left(2^2+1\right) = f(2)^2 + 1 = 5.$$

$$f(8) = f\left(2\times 2^2\right) = 2f(2)^2 = 8.$$

Avec n = 4

$$f(16) = f\left(4^2\right) = f(4)^2 = 16.$$

$$f(17) = f\left(4^2+1\right) = f(4)^2 + 1 = 17.$$

Avec n = 5,

$$f(25) = f(5)^2 = 25.$$

$$f(26) = f\left(5^2+1\right) = f(5)^2 + 1 = 26.$$

$$f(50) = 2f(5)^2 = 50.$$

On peut alors calculer $f(3)$:

$$25 = f(25) = f\left(3^2+4^2\right) = f(3)^2 + f(4)^2 = f(3)^2 + 16,$$

et toujours parce que f est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$f(3) = 3.$$

On a aussi

$$f(9) = f(3)^2 = 9.$$

puis

$$f(10) = f\left(3^2+1\right) = f(3)^2 + 1 = 10.$$

On a encore besoin de $f(6) = 6$ pour conclure. Pour cela, on écrit

$$10^2 = 6^2 + 8^2,$$

donc

$$10^2 = f(10)^2 = f(6)^2 + f(8)^2 = f(6)^2 + 8^2,$$

donc

$$f(6) = 6.$$

Maintenant, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8n = (n+2)^2 - (n-2)^2,$$

donc

$$\left(2n+1\right)^2+\left(n-2\right)^2=\left(2n-1\right)^2+\left(n+2\right)^2, \qquad (1)$$

et

$$\left(2n+2\right)^2-\left(2n-2\right)^2=16n=\left(n+4\right)^2-\left(n-4\right)^2,$$

ce que l'on écrit

$$\left(2n+2\right)^2+\left(n-4\right)^2=\left(2n-2\right)^2+\left(n+4\right)^2. \qquad (2)$$

On est alors en mesure de montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$. C'est initialisé pour $n \in [0, 6]$ et l'on suppose le résultat établi jusqu'à un certain entier $\mathrm{N} - 1 \geq 6$. On peut écrire $\mathrm{N} = 2n + 1$ avec $n \geq 3$ ou $\mathrm{N} = 2n + 2$ avec $n \geq 3$ (et c'est pour cela que l'on avait besoin de calculer $f(6)$).
Dans le premier cas, la relation (1) donne

$$f\left(\left(2n+1\right)^2+\left(n-2\right)^2\right)=f\left(\left(2n-1\right)^2+\left(n+2\right)^2\right),$$

soit encore

$$f\left(2n+1\right)^2+f\left(n-2\right)^2=f\left(2n-1\right)^2+f\left(n+2\right)^2.$$

On peut utiliser l'hypothèse de récurrence, car les entiers $n - 2$, $2n - 1$, $n + 2$ sont strictement inférieurs à $\mathrm{N} = 2n + 1$. Ainsi,

$$f\left(2n+1\right)^2+\left(n-2\right)^2=\left(2n-1\right)^2+\left(n+2\right)^2,$$

soit, en utilisant de nouveau (1),

$$f\left(2n+1\right)=2n+1.$$

Le cas où $\mathrm{N} = 2n + 2$ découle de (2) de la même manière en remarquant que les entiers $n - 2$, $2n - 2$, $n + 4$ sont tous strictement inférieurs à $2n + 2$.