On remarque que

$$f(a,b,c) = \frac{1}{6}\left((a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2 + 2(a+b+c) + 3(b+c)^2 + 3b + 9c\right),$$

et on en déduit que

$$f(a,b,c)=\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c+2)}{6}+\frac{(b+c)(b+c+1)}{2}+c.$$

Sur cette formule, il est clair que f est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit N un entier positif ou nul. Puisque la fonction $u\in\mathbb{N}\mapsto\frac{u(u+1)(u+2)}{6}$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, il existe un unique entier $k\geq 0$ tel que

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6}\leq \mathrm{N}<\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

On pose $n=\mathrm{N}-\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$. On a alors

$$0\leq n<\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}-\frac{k(k+1)(k+2)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Il existe donc un unique entier $\ell\in[0,k]$ tel que

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2}\leq n<\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}.$$

On pose $m=n-\frac{\ell(\ell+1)}{2}$. On a alors

$$0\leq m<\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}-\frac{\ell(\ell+1)}{2}=\ell+1.$$

Il existe donc des entiers $0\leq m\leq \ell\leq k$ tels que

$$\mathrm{N}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{\ell(\ell+1)}{2}+m.$$

On a à résoudre dans $\mathbb{N}^3$ le système

$$\begin{cases}a+b+c=k\\ \quad b+c=\ell\\ \qquad c=m\end{cases}.$$

On trouve

$$\begin{cases}a=k-l\in\mathbb{N}\\ b=l-m\in\mathbb{N}\\ c=m\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

Ainsi, tout entier N s'écrit de manière unique $f(a,b,c)$ avec $a,b,c\in\mathbb{N}$.