Solution de Fernand Canonico (Clermont-Ferrand) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Je remercie chaleureusement **Pierre Renfer** qui, à plusieurs reprises, a détaillé sa rédaction à ma demande. Et tout aussi chaleureusement, je remercie mon collègue **Fernand Canonico** pour ses nombreuses explications, toujours enrichissantes. C'est lui qui a attiré mon attention sur les énoncés 521-1 et 521-2. Et c'est à lui que l'on doit la belle solution exposée ci-après.

Les deux réponses proposées établissent, par des méthodes très différentes, le résultat suivant :

Théorème – Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. La suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et $f_{n+1} = \boldsymbol{\tau}\left(f_n\right)$ converge uniformément vers 0.

On commence par un lemme.

Lemme 1 – La suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue.

Preuve du lemme 1

Soit $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, $v = \tau(u)$ et $\mu = \int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème de Heine, la fonction u est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Soit δ un module de continuité uniforme pour u associé à ε. C'est aussi un module de continuité pour v associé à ε. En effet, si $|x-y| \leq \delta$, alors

$$\left|v(x)-v(y)\right| = \left\|u(x)-\mu\right|-\left|u(y)-\mu\right\| \leq \left|u(x)-u|y\right\| \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit par récurrence sur n qu'un module de continuité uniforme pour $f_0 = f$ associé à ε est un module de continuité uniforme pour chaque f_n.

Voici un second lemme.

Lemme 2 – Si (g_n) est une suite uniformément équicontinue de fonctions positives sur [0, 1], la convergence vers 0 de la suite $\left(\int_0^1 g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à la convergence uniforme sur [0, 1] de la suite de fonctions (g_n) vers 0.

Preuve du lemme 2

Soit $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on note $J_\delta(x)$ un segment de longueur δ inclus dans [0, 1] et contenant x. Par exemple, pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on choisit $J_\delta(x) = [x, x+\delta]$ et pour $\frac{1}{2} < x \leq 1$, $J_\delta(x) = [x-\delta, x]$. Comme $\int_0^1 g_n \to 0$, la majoration

$$0 \leq \frac{1}{\delta}\int_{J_\delta(x)} g_n \leq \frac{1}{\delta}\int_0^1 g_n$$

montre la convergence uniforme vers 0 de la suite de fonctions $x \mapsto \frac{1}{\delta}\int_{J_\delta(x)} g_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\delta \leq \frac{1}{2}$ un module de continuité uniforme pour chaque g_n associé à $\frac{\varepsilon}{2}$. On a

$$\left|\frac{1}{\delta}\int_{J_\delta(x)} g_n - g_n(x)\right| = \left|\frac{1}{\delta}\int_{J_\delta(x)}\left(g_n(t)-g_n(x)\right)\mathrm{d}t\right|$$

donc

$$\left|\frac{1}{\delta}\int_{J_\delta(x)} g_n - g_n(x)\right| \leq \frac{1}{\delta}\int_{J_\delta(x)}\left|g_n(t)-g_n(x)\right|\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Par convergence uniforme vers 0 de la suite de fonctions $\left(x \mapsto \frac{1}{\delta}\int_{\mathrm{J}_\delta(x)} g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{\delta}\int_{\mathrm{J}_\delta(x)} g_n \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent alors, pour tout $n \geq n_0$ et tout x $\in [0, 1]$

$$0 \leq g_n(x) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve le lemme.
On peut maintenant conclure.

Preuve du théorème

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = \tau(f_n)$. D'après le premier lemme, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue. Pour $n \geq 1$, chaque f_n est positive. Donc, d'après le second lemme, il suffit de montrer que $\int_0^1 f_n$ tend vers 0. Posons pour simplifier

$$\mu_n = \int_0^1 f_n\,.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^1 f_{n+1}^2 = \int_0^1 (f_n - \mu_n)^2 = \int_0^1 f_n^2 - \mu_n^2.$$

Ceci montre déjà que la suite $\left(\int_0^1 f_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée par 0, celle converge, disons vers ℓ. Mais alors

$$\mu_n^2 = \int_0^1 f_n^2 - \int_0^1 f_{n+1}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^2 - \ell^2 = 0,$$

ce qui conclut.