Solutions de Michel Bataille (Rouen), Maurice Bauval (Versailles), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Michel Lafond (Dijon), Étienne Lefaux (Lille), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

(1) On commence par montrer que la suite de points $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet n pour période.

D'après la définition des suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a pour k > 1,

$$y_k = y_{k-1} + Ax_k = Ax_{k-1} + \left(1 - A^2\right) y_{k-1}.$$

Donc pour $k \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}$$

où N est la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -A \\ A & 1 - A^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $k \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = N^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice N a pour polynôme caractéristique

$$\chi_N(X) = X^2 - \left(2 - A^2\right) X + 1.$$

Or

$$2-\mathrm{A}^2=2-4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Donc

$$\chi_{\mathrm{N}}(\mathrm{X})=\left(\mathrm{X}-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2+1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\left(\mathrm{X}-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Les valeurs propres de N sont donc

$$\zeta=\exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)\ \text{et}\ \overline{\zeta}=\exp\left(-\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right).$$

Ayant deux valeurs propres (distinctes), la matrice N est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Il existe une matrice P de passage telle que

$$\mathrm{N}=\mathrm{PDP}^{-1}\ \text{avec}\ \mathrm{D}=\begin{pmatrix}\zeta & 0\\ 0 & \overline{\zeta}\end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\mathrm{D}^n=\mathrm{I}_2$ donc $\mathrm{N}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}=\mathrm{I}_2$, ce qui montre que la suite est périodique de période n : pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix}x_{k+n}\\ y_{k+n}\end{pmatrix}=\mathrm{N}^n\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}.$$

Noter que la suite est périodique quelle que soit la condition initiale (x_0, y_0).

(2) On montre maintenant que tous les points M_k sont sur une ellipse. Pour cela, on cherche une matrice de passage P explicite dans l'écriture $\mathrm{N}=\mathrm{PDP}^{-1}$. Un vecteur propre $\mathrm{V}_1=\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1=\zeta$ vérifie

$$u_1(1-\zeta)=\mathrm{A}v_1.$$

En posant

$$\omega=\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{n}\right),$$

on a

$$\zeta=\omega^2\ \text{et}\ \mathrm{A}=\frac{1}{\mathrm{i}}(\omega-\overline{\omega}).$$

Si l'on choisit $v_1=\omega$, on a alors

$$u_1=\frac{\mathrm{A}v_1}{1-\zeta}=\frac{\omega^2-1}{\mathrm{i}(1-\omega^2)}=\mathrm{i}.$$

On prend donc $V_1 = \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}$. Par conjugaison, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = \overline{\xi}$ est par exemple $V_2 = \begin{pmatrix} -i \\ \overline{\omega} \end{pmatrix}$. Une matrice de passage possible est

$$P = \begin{pmatrix} i & -i \\ \omega & \overline{\omega} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det(P) = i(\omega + \overline{\omega}) = 2i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

et

$$P^{-1} = \frac{1}{2i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \begin{pmatrix} \overline{\omega} & i \\ -\omega & i \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = N^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = PD^kP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \begin{pmatrix} i & -i \\ \omega & \overline{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^k & 0 \\ 0 & \overline{\xi}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\omega} \\ -\omega \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \begin{pmatrix} 2i\Re\left(\overline{\omega}^k\right) \\ 2i\Im\left(\xi^k\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{n}\right) \\ \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

Un peu de trigonométrie donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Donc

$$x_k - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) y_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Par ailleurs,

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) y_k = \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

En sommant les carrés de ces deux relations, on a montré que tous les points $M_k\left(x_k, y_k\right)$ sont sur l'ellipse d'équation

$$\left(x - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)y\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)y\right)^2 = 1,$$

soit encore

$$x^2 + y^2 - 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)xy = 1.$$

Le centre de cette ellipse est l'origine du repère et les axes de cette ellipse sont portés par les bissectrices des axes du repère.

(3) On calcule maintenant l'aire du polygone délimité par les points $\left(M_k\right)_{0\le k\le n}$. Cette aire est la somme de l'aire des triangles OM_kM_{k+1} pour $0 \le k \le n - 1$. L'aire d'un tel triangle est égale a

$$\frac{1}{2}\left|x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}\right|.$$

Avec les relations de récurrence vériées par les suites (x_k) et (y_k), cela vaut

$$\frac{1}{2}\left|Ax_k^2 + \left(1 - A^2\right)x_k y_k - x_k y_k + Ay_k^2\right| = \frac{A}{2}\left|x_k^2 - Ax_k y_k + y_k^2\right| = \frac{A}{2}.$$

L'aire de chaque triangle est constante, donc l'aire du polygone vau

$$n\frac{A}{2} = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

L'inégalité classique

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin\left(x\right) \le x$$

valable pour $x > 0$ donne alors l'encadrement voulu : l'aire est comprise entre $\pi - \dfrac{\pi^3}{6n^2}$ et π.