Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Poitiers juin 1970 ∽

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Calculer le module et l'argument de z.
2. Montrer que les images dans le plan complexe, de z, $-z$, z^2 et $\dfrac{2}{z}$ sont situées sur un même cercle.

EXERCICE 2

Soit le nombre $a = 2n\left(n^2+5\right)$, où n est un entier au moins égal à 1.
Montrer que a est divisible par 3 et par 4.
En déduire qu'il existe au moins un autre entier k tel que, pour tout $n \geqslant 1$, k divise a. Rappeler le théorème utilisé.

PROBLÈME

Dans tout le problème, on supposera le plan (P) rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy).
Soit la transformation ponctuelle $T_{(a,\ \lambda)}$ qui, à un point $m(x\ ;\ y)$ du plan, fait correspondre le point $M(X\ ;\ Y)$ dont les coordonnées sont

$$X = x + a \quad \text{et} \quad Y = \lambda y,$$

où a et λ sont réels et $\lambda \neq 0$. On désigne par $\mathscr{T}$ l'ensemble des transformations $T_{(a,\ \lambda)}$.

A.

1. Quelle est, dans le plan (P), la transformation

$$U_a = T_{(a,\ 1)}?$$

   Montrer que l'ensemble, $\mathscr{U}$, de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.
2. Quelle est, dans le plan (P), la transformation

$$V_\lambda = T_{(0,\ \lambda)}?$$

   Montrer que l'ensemble $\mathscr{V}$, de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.
3. Montrer que la transformation composée

$$T_{(a',\ \lambda')} \circ T_{(a,\ \lambda)}$$

   est dans $\mathscr{T}$.
   Montrer que $\mathscr{T}$, muni de la loi $\circ$, est un groupe commutatif.
4. Montrer que $T_{(a,\ \lambda)}$ peut être considérée comme la composée d'une transformation de $\mathscr{U}$ et d'une transformation de $\mathscr{V}$.

B.

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que

$$f(x) = x\mathrm{e}^x,$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

1. Calculer les dérivées première et seconde de f et en déduire, par récurrence, la dérivée d'ordre n.
2. Étudier les variations de la fonction f_n telle que

$$f_n(x) = (x+n)\mathrm{e}^x,$$

où n est un entier relatif donné.
Tracer les courbes représentatives, (C_{-1}), (C_0) et (C_1) des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

3. Calculer

$$I_0(h) = \int_0^h f_0(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n(h) = \int_{-n}^{-n+h} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

en fonction de h et établir la relation

$$(\mathrm{R}) \qquad I_n(h) = \mathrm{e}^{-n} I_0(h).$$

C.

Déterminer a et λ pour que le minimum de (C_0) ait pour transformé par $T_{(a,\,\lambda)}$ le minimum de (C_n) et montrer que (C_0) est alors transformée en (C_n).
Quelle relation existe-t-il entre l'aire d'un domaine plan défini par les relations

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \qquad 0 \leqslant y \leqslant g(x),$$

où g est une fonction continue, positive donnée, et l'aire du transformé de ce domaine par $T_{(a,\,\lambda)}$? Retrouver ainsi la relation (R).