Baccalauréat C Poitiers juin 1973

EXERCICE 1

1. Dériver la fonction numérique g d'une variable réelle définie par $g(x) = \mathrm{e}^x(x - n)$ où n est un entier relatif.

2. $\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière du réel x, ($\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x), étudier la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x(x - \mathrm{E}(x))$.
Tracer sa courbe représentative en se limitant au cas où x appartient à l'intervalle $[-2~;~1]$, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x$ où k est un entier naturel strictement positif.

EXERCICE 2

Soit le nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$ ayant pour image, dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ le point M de coordonnées x et y.

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z-i

$$Z = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
   - **a.** Z soit réel ;
   - **b.** Z soit imaginaire pur ;
   - **c.** Z ait pour argument $-\dfrac{\pi}{2}$.

PROBLÈME

E désigne un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ euclidien rapporté à une base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\imath}\right)$.
On considère l'ensemble F des endomorphismes (voir note 1) [1] f_m de E ayant pour matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\imath}\right)$,

$$A_m = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5m-8 & 4\sqrt{2}(m-1)+3\sqrt{3}(m-2) \\ 4\sqrt{2}(m-1)-3\sqrt{3}(m-2) & m-4 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. f_m peut-il être une homothétie vectorielle ?
À quelle condition (nécessaire et suffisante) doit satisfaire m pour que f_m soit bijectif ?

2. On suppose dans cette question que $m = \dfrac{3}{2}$. Donner une base du noyau et une base de l'image de $f_{\frac{3}{2}}$.

3. Montrer que f_m est un endomorphisme orthogonal [2] de E si et seulement si $m = 1$ ou $m = 2$. On trouve ainsi une rotation φ dont on précisera l'angle, et une symétrie σ dont on déterminera l'axe.

---

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel est une application linéaire de cet espace dans lui-même.

2. Si E est un espace vectoriel euclidien et si on désigne par $\left\|\overrightarrow{X}\right\|$ la norme d'un vecteur $\overrightarrow{X}$ de E, un endomorphisme orthogonal de E est un endomorphisme f de E tel que $\left\|\overrightarrow{f(X)}\right\| = \left\|\overrightarrow{X}\right\|$ pour tout $\overrightarrow{X}$ appartenant à E.

4. On pose : $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2$.
Démontrer que l'ensemble $\Phi = \left\{\varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3\right\}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.
En déduire que, pour toute symétrie orthogonale σ_1 de E, on a :

$$\varphi^2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \varphi \quad \text{et} \quad \sigma_1 \circ \varphi^2 = \varphi \circ \sigma_1$$

L'un des endomorphismes $\sigma \circ \varphi$ et $\varphi \circ \sigma$ appartient-il à F ?

Partie B

On considère un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ associé à E et rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les applications affines r et s associées respectivement à φ et σ, admettant O comme point invariant.
Déterminer l'axe de chacune des symétries orthogonales $s \circ r$ et $r \circ s$.
2. Soit Γ_λ l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ satisfont l'équation :

$$\lambda x^2 + y^2 - 2y + 2 - \lambda = 0$$

(λ paramètre réel).
Discuter suivant les valeurs de λ la nature de Γ_λ.
3. Montrer géométriquement que r et s transforment Γ_λ en une courbe de même nature.