Baccalauréat C Poitiers septembre 1970

EXERCICE 1

Trouver les entiers naturels compris entre 100 et 200, divisibles par 9, et i dans le système de numération de base 6 s'écrivent $\overline{x3y}$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$

1. Calculer $f(-1), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0)$ et $f(1)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = a$ admet trois racines réelles distinctes comprises. entre -1 et $+1$.
3. Calculer cos 3lX en fonction de cos lX. Posant alors x = cos lX, en déduire les trois racines de l'équation $f(x) = a$ sous forme trigonométrique.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{O}y)$. Soit I et J deux points du plan ; on désigne par $\mathscr{R}$, la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$, par $\mathscr{H}$, l'homothétie de centre J et de rapport $\sqrt{2}$ et par $\mathscr{S}$ la transformation composée $\mathscr{H} \circ \mathscr{R}$.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que I et J sont confondus en O. On désignera par $\mathscr{R}_0$, $\mathscr{H}_0$ et $\mathscr{S}_0$ les transformations $\mathscr{R}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{S}$ correspondantes.
On donne les points $\mathrm{A}(+1~;~0)$ et $\mathrm{B}(+1~;~+1)$.

1. Soit F le faisceau de cercles admettant A et B pour points de base. Déterminer géométriquement l'ensemble, F$'$, des transformés par $\mathscr{S}_0$ des cercles du faisceau F.
2. Soit (C_1) le cercle de diamètre AB. Déterminer son transformé $\left(C'_1\right)$ par $\mathscr{S}_0$. Montrer qu'il existe un cercle unique (C_2) du faisceau F qui est orthogonal à $\left(C'_1\right)$.
   Montrer que le transformé $\left(C'_2\right)$ du cercle (C_2) par $\mathscr{S}_0$ est un cercle orthogonal à (C_1).
3. Plus généralement, (Γ_1) et (Γ_2) étant deux cercles du faisceau F, $\left(\Gamma'_1\right)$ et $\left(\Gamma'_2\right)$, leurs transformés par $\mathscr{S}_0$, montrer que, si (Γ_2) est orthogonal à $\left(\Gamma'_1\right)$; alors (Γ_1) est orthogonal à $\left(\Gamma'_2\right)$.

Partie B

Dans cette partie, les points I et J sont quelconques. On désigne par $\mathscr{R}(m)$, $\mathscr{H}(m)$ et $\mathscr{S}(m)$ les transformés d'un point m du plan par $\mathscr{R}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{S}$ respectivement.
À tout point m du plan, de coordonnées $(x~;~y)$, on associe le nombre complexe $z_m = x + \mathrm{i}y$. Aux points I et J sont donc associés, en particulier, des nombres z_{I} et z_{J}.

1. Donner $z_{m'}$ en fonction de z_m en désignant par m' le point $\mathscr{R}(m)$.
2. Donner $z_{m''}$ en fonction de $z_{m'}$ en désignant par m'' le point $\mathscr{H}(m') = \mathscr{S}(m)$.
3. Donner $z_{m''}$ en fonction de z_m. Montrer que $\mathscr{S}$ a un point double unique K. Déterminer z_{K} en fonction de z_{I} et z_{J}

Partie C

1. À quelle relation z_{I} et z_{J} doivent-ils satisfaire pour que $\mathscr{S}$ soit identique à $\mathscr{S}_0$?
2. Montrer alors que J est le transformé de I dans la similitude de centre O, d'angle $-\dfrac{3\pi}{8}$ et de rapport $\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}$.