

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1969 ∞

EXERCICE 1

Résoudre, dans \mathbb{R}^2 le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} xy & = 256, \\ 7(\log_y x + \log_x y) & = 50. \end{cases}$$

EXERCICE 2

Trouver un nombre entier relatif n tel que $n^2 + n + 7$ soit congru à zéro modulo 13.
En déduire l'ensemble des entiers relatifs satisfaisant à cette condition.

PROBLÈME

1. On définit, dans le plan complexe, une transformation ponctuelle de la façon suivante :
au point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = z^2$.
On désignera par ρ et θ le module et l'argument de z , par ρ' et θ' ceux de z' .
On notera respectivement $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' désignent des nombres réels.

Exprimer ρ' et θ' en fonction de ρ et θ et $(x' ; y')$ en fonction de $(x ; y)$.
La transformation ainsi définie est-elle une injection ?
Déterminer l'ensemble des points doubles.
2. Déterminer l'ensemble des points M' lorsque l'ensemble des points M est :
 - une demi-droite passant par l'origine ;
 - une droite passant par l'origine ;
 - l'ensemble des points tels que $|y| - |x| = 0$;
 - deux droites perpendiculaires passant par l'origine.
3. a. Déterminer l'ensemble des points M' lorsque l'ensemble des points M est :
 - la droite d'équation $x = a$ ($a \neq 0$) ;
 - la droite d'équation $y = b$ ($b \neq 0$).Montrer que les courbes obtenues ont deux points communs et que leurs tangentes en ces points sont orthogonales.
- b. Soit (\mathcal{P}) la parabole ayant pour directrice la droite d'équation $x = -2$ et pour foyer le point O. Déterminer l'ensemble des points M dont l'image est la parabole (\mathcal{P}) .
- c. Soit A, B, C, D les points d'affixes respectives 1, i, -1, -i.
Déterminer l'ensemble des points M' lorsque l'ensemble des points M est :
 - la droite AB ;
 - le contour du carré ABCD.
4. a. L'ensemble des points M est une hyperbole équilatère, (H) , de centre a et dont l'un des foyers est A(+1 ; 0).
Déterminer l'équation de (H) et montrer que l'ensemble des points M' est la directrice de (H) associée au foyer A.

- b.** Déterminer l'ensemble, (H_1) , des points M pour que l'ensemble des points M' correspondants soit la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c.** Soit U et V les points communs à (H) et (H_1) . Déterminer le transformé de chacun d'eux.
Quelles sont les coordonnées de U et V ?
Démontrer que les tangentes à (H) et (H_1) en U et V sont orthogonales.