✿ Baccalauréat C Poitiers juin 1971 ✿

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe

$$Z = \cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}.$$

1. Calculer z^5.
2. On pose $u = z + z^4$ et $v = z^2 + z^3$.
   Calculer $u + v$ et uv et en déduire u et v.
3. Exprimer $\cos\frac{2\pi}{5}$ en fonction de u ; en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

EXERCICE 2

Un nombre s'écrit $\overline{x32y}$ dans la base 5.
Déterminer x et y pour que ce nombre soit divisible par 3 et par 4.

PROBLÈME

Soit (Π) l'ensemble des points du plan rapportés à un repère d'axes Ox et Oy. Dans (Π), on définit une loi de composition interne qui, au couple $(m,\ m')$ de points de (Π), associe le point $M = m \star m'$ de (Π) défini comme suit :
si $(x\ ;\ y)$ sont les coordonnées de m, si $(x'\ ;\ y')$ sont celles de m', alors les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de M sont définies par les égalités

$$X = x + x' \quad \text{et} \quad Y = y + y' + 2xx'.$$

1. **a.** Démontrer que (Π) est un groupe commutatif pour la loi $\star$.
   b. Soit (C) la courbe d'équation $y = f(x)$, g la fonction définie par $g(x) = f(x) - x^2$.
   Si m et m' sont choisis sur (C), démontrer que M est sur (C) si, et seulement si, $g(x) + g(x') = g(x + x')$.
2. À tout point $m(x\ ;\ y)$ on fait correspondre le point $m_1(x_1\ ;\ y_1)$, avec

$$x_1 = -x \quad \text{et} \quad y_1 = -y + 2x^2.$$

   a. Montrer que l'application, T, de (Π) dans (Π) ainsi définie est bijective et involutive.
   b. Quelles sont l'équation et la nature de l'image par T d'une courbe (Γ) d'équation $t = ax^2 + bx + c$?
   Préciser l'image de l'axe Ox.
   Quelles sont les courbes (Γ) globalement invariantes ? Démontrer que la courbe (C) est globalement invariante si, et seulement si, la fonction g est impaire.
3. Dans toute la suite du problème, m et m' sont pris sur la courbe (Γ_0) d'équation $y = x^2 + bx$.
   a. Montrer que la loi $\star$ munit (Γ_0) d'une structure de groupe abélien. On notera m_1 le symétrique de m pour la loi $\star$.

b. Lorsque m est différent de m', montrer que $\overrightarrow{mm'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ ont même direction.

Montrer que $\overrightarrow{mm_1}$ a une direction fixe.

Par quelle transformation connue peut-on déduire m_1 de m ?

A et B sont deux points de (Γ_0), variables, distincts, différents de O. La parallèle à OA passant par B recoupe (Γ_0) en B$'$ et la parallèle à OB passant par A recoupe (Γ_0) en A$'$, les points A$'$ et B$'$ étant supposés distincts de A et de B.

Déterminer $\mathrm{A} \star \mathrm{B} \star \mathrm{A}' \star \mathrm{B}'$; démontrer que A$'B'$ garde une direction fixe et que le milieu du segment A$'$B$'$ reste sur une droite fixe.