Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Poitiers juin 1972 ∾

EXERCICE 1

Soit N un entier naturel, tel que, en numération décimale, N s'écrive $\overline{abcd}$ et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ soit divisible par 7.

1. **a.** Montrer que, si $a = 0$ ou $a = 7$, alors N est divisible par 7.

   b. Montrer que $10N - 3a$ est multiple de 7. En déduire que si N est divisible par 7, alors $a = 0$ ou $a = 7$.
2. On suppose $a = 7, b = d$ et $c = 0$. Déterminer N pour qu'il soit divisible par 3.

EXERCICE 2

Soit (P) un plan affine euclidien et soit $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère de (P).
A est le point de coordonnées (1 ; 0).
B est le point de coordonnées (−1 ; 0).
k_1 et k_2 sont deux réels non nuls.
Soit M un point quelconque de (P), M_1 le transformé de M dans l'homothétie de centre A et de rapport k_1 et M_2 le transformé de M dans l'homothétie de centre B et de rapport k_2
Soit alors M' le transformé de O dans la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$
f est l'application de (P) vers (P) qui à M associe M'.

1. Chercher si f admet des points invariants.
2. Si $k_1 \neq k_2$, montrer que f est, soit une translation, soit une homothétie, que l'on précisera.
   Étudier le cas particulier $k_1 = k_2$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On prend pour unité 1 cm.

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto y = f(x) = \frac{x^2 + 4x - 3}{|x + 6|}$$

   Étudier les variations de f, puis tracer sa courbe représentative (Γ) dans le repère $\mathcal{R}$.
2. Discuter suivant les valeurs de k, le nombre de points d'intersections de (Γ) avec la droite d'équation $y = k$.
   Dans le cas où il n'y a que deux points d'intersection A_k et B_k soit G_k le centre de gravité de O, A_k et B_k (c'est-à-dire le barycentre des trois points O, A_k et B_k affectés de coefficients égaux).
   Quel est l'ensemble (D) des points G_k lorsque k varie ?
3. Calculer l'aire comprise entre (D), (Γ) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.
   On pourra mettre $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 6}.$$

4. On pose $Z = -\dfrac{z^2+4z-3}{|z+6|}$, où $z \in \mathbb{C}$.

Soit P le point de coordonnées $(x\,;\ y)$, d'affixe z.

a. Quel est l'ensemble des points P tels que Z soit réel ? Calculer Z dans chacun des cas. Que remarque-t-on ?

b. Montrer que l'ensemble des points P tels que Z soit imaginaire pur est une conique, dont on précisera la nature et, s'il y a lieu, le centre, les axes de symétrie, les sommets et les éléments caractéristiques.