

∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1974 ∞

EXERCICE 1

Soit un nombre entier $q > 2$.

On considère les nombres complexes z, z_1, z_2 formant dans cet ordre une progression géométrique de raison q .

1. Que peut-on dire des arguments de z, z_1, z_2 ?
2. On désigne par r, r_1, r_2 les modules respectifs de z, z_1, z_2 . Montrer qu'il existe une valeur de q telle que :

$$z + z_1 + z_2 = \frac{21(5i - \sqrt{3})}{2 - i\sqrt{3}}.$$

et que r, r_1 et r_2 soient entiers.

Déterminer les valeurs correspondantes de z, z_1, z_2 .

EXERCICE 2

Dans E_2 plan affine euclidien, on considère trois points A, B, C tels que

$$AC = 3a, \quad BC = 5a, \quad AB = 4a$$

(a étant un réel positif donné).

1. Trouver l'ensemble des points M de E_2 vérifiant

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{V}$$

(\vec{V} étant un vecteur donné du plan vectoriel associé à E_2).

2. Trouver l'ensemble des points M de E_2 vérifiant :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Déterminer alors l'ensemble des points M de E_2 vérifiant :

$$MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 5a^2$$

et le représenter graphiquement.

PROBLÈME

Soit F l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des fonctions numériques définies dans \mathbb{R} , les opérations étant l'addition usuelle et la multiplication usuelle par un réel. Dans tout le problème, on appellera f_0, f_1 et f_2 les trois éléments de F respectivement définis, pour tout x réel par :

$$f_0(x) = e^{-x}, \quad f_1(x) = xe^{-x}, \quad f_2(x) = x^2e^{-x}$$

Partie A

On considère l'ensemble E des fonctions numériques f définies, pour tout x réel, par $f(x) = e^{-x} \cdot P(x)$, P désignant un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de F , et que (f_0, f_1, f_2) est une base de E .
2. On considère l'application D qui, à toute fonction f de E , associe sa fonction dérivée $f' = D(f)$.
 - a. Démontrer que D est un endomorphisme bijectif de E .
 - b. Soit φ l'élément de E défini par

$$\varphi = af_0 + bf_1 - 2f_2$$

a et b étant deux réels fixés.

Déterminer la fonction f de E telle que $D(f) = \varphi$.

3. On appelle E_1 le sous-ensemble de E formé des éléments $\varphi = af_0 + bf_1 - 2f_2$ quand a et b décrivent \mathbb{R} .
 E_1 est-il un sous-espace vectoriel de E ? E_1 est-il stable pour l'endomorphisme D ?
 On pose $D^2 = D \circ D$. Démontrer que E_1 est stable pour D^2 . Existe-t-il des éléments de E_1 qui soient invariants pour D^2 ?

Partie B

On appelle Φ la fonction numérique définie, pour tout x réel, par :

$$\Phi(x) = -2e^{-x}(1 + x + x^2)$$

1. a. Étudier les variations de la fonction Φ .
 Tracer sa courbe représentative \mathcal{C} dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (on prendra 2 cm comme unité de longueur).
- b. Soit un nombre réel $\lambda > 0$; calculer l'aire de la partie du plan définie par : $0 \leq x \leq \lambda$ et $\Phi(x) \leq y \leq 0$.
 Cette aire admet-elle une limite lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$?
2. On pose $\Phi_1 = D^2(\Phi)$ et pour tout entier naturel n non nul, $\Phi_{n+1} = D^2(\Phi_n)$.
 - a. Démontrer que, pour toute valeur de n , Φ_n peut s'écrire :

$$\Phi_n = a_n f_0 + b_n f_1 - 2f_2$$

a_n et b_n étant deux entiers relatifs.

Établir les relations

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n - 2b_n - 4 \\ b_{n+1} &= 8 + b_n \end{cases}$$

- b. Calculer b_n puis a_n en fonction de l'entier naturel n .
3. Démontrer que, pour toute valeur de n , l'équation $\Phi_n(x) = 0$ possède deux solutions distinctes.
 On se propose de chercher s'il existe des valeurs de n pour lesquelles ces deux solutions sont rationnelles. À cet effet, on établira que les deux solutions de l'équation sont rationnelles si et seulement si $8n - 3$ est le carré d'un entier naturel p .
 Existe-t-il des valeurs de n telles que les deux solutions de l'équation $\Phi_n(x) = 0$ soient rationnelles (on pourra utiliser une relation de congruence)?

N. B. : Dans la partie B, les questions 2. et 3. sont indépendantes de la question 1.