Baccalauréat C Poitiers juin 1974

EXERCICE 1

Soit un nombre entier $q > 2$.
On considère les nombres complexes z, z_1, z_2 formant dans cet ordre une progression géométrique de raison q.

1. Que peut-on dire des arguments de z, z_1, z_2 ?
2. On désigne par r, r_1, r_2 les modules respectifs de z, z_1, z_2. Montrer qu'il existe une valeur de q telle que :

$$z + z_1 + z_2 = \frac{21\left(5\mathrm{i} - \sqrt{3}\right)}{2 - \mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

   et que r, r_1 et r_2 soient entiers.
   Déterminer les valeurs correspondantes de z, z_1, z_2.

EXERCICE 2

Dans E_2 plan affine euclidien, on considère trois points A, B, C tels que

$$\mathrm{AC} = 3a, \quad \mathrm{BC} = 5a, \quad \mathrm{AB} = 4a$$

(a étant un réel positif donné).

1. Trouver l'ensemble des points M de E_2 vérifiant

$$\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{C}} = \overrightarrow{\mathrm{V}}$$

   ($\overrightarrow{\mathrm{V}}$ étant un vecteur donné du plan vectoriel associé à E_2).
2. Trouver l'ensemble des points M de E_2 vérifiant :

$$\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} - 3\overrightarrow{M\mathrm{C}} = \overrightarrow{0}.$$

   Déterminer alors l'ensemble des points M de E_2 vérifiant :

$$M\mathrm{A}^2 + M\mathrm{B}^2 - 3M\mathrm{C}^2 = 5a^2$$

   et le représenter graphiquement.

PROBLÈME

Soit F l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques définies dans $\mathbb{R}$, les opérations étant l'addition usuelle et la multiplication usuelle par un réel. Dans tout le problème, on appellera f_0, f_1 et f_2 les trois éléments de F respectivement définis, pour tout x réel par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \quad f_2(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$$

Partie A

On considère l'ensemble E des fonctions numériques f définies, pour tout x réel, par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot P(x),$$

P désignant un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de F, et que $\left(f_0, f_1, f_2\right)$ est une base de E.

2. On considère l'application D qui, à toute fonction f de E, associe sa fonction dérivée $f' = D(f)$.

a. Démontrer que D est un endomorphisme bijectif de E.

b. Soit φ l'élément de E défini par

$$\varphi = af_0 + bf_1 - 2f_2$$

a et b étant deux réels fixés.

Déterminer la fonction f de E telle que $D(f) = \varphi$.

3. On appelle E_1 le sous-ensemble de E formé des éléments $\varphi = af_0 + bf_1 - 2f_2$ quand a et b décrivent $\mathbb{R}$.

E_1 est-il un sous-espace vectoriel de E ? E_1 est-il stable pour l'endomorphisme D ?

On pose $D^2 = D \circ D$. Démontrer que E_1 est stable pour D^2. Existe-t-il des éléments de E_1 qui soient invariants pour D^2 ?

Partie B

On appelle Φ la fonction numérique définie, pour tout x réel, par :

$$\Phi(x) = -2\mathrm{e}^{-x}\left(1 + x + x^2\right)$$

1. a. Étudier les variations de la fonction Φ.

Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (on prendra 2 cm comme unité de longueur).

b. Soit un nombre réel $\lambda > 0$; calculer l'aire de la partie du plan définie par : $0 \leqslant x \leqslant \lambda$ et $\Phi(x) \leqslant y \leqslant 0$.

Cette aire admet-elle une limite lorsque $\lambda \to +\infty$?

2. On pose $\Phi_1 = D^2(\Phi)$ et pour tout entier naturel n non nul, $\Phi_{n+1} = D^2\left(\Phi_n\right)$.

a. Démontrer que, pour toute valeur de n, Φ_n peut s'écrire :

$$\Phi_n = a_n f_0 + b_n f_1 - 2f_2$$

a_n et b_n étant deux entiers relatifs.

Établir les relations

$$\left\{\begin{array}{rcr} a_{n+1} & = & a_n - 2b_n - 4 \\ b_{n+1} & = & b_n + 8 \end{array}\right.$$

b. Calculer b_n puis a_n en fonction de l'entier naturel n.

3. Démontrer que, pour toute valeur de n, l'équation $\Phi_n(x) = 0$ possède deux solutions distinctes.

On se propose de chercher s'il existe des valeurs de n pour lesquelles ces deux solutions sont rationnelles. À cet effet, on établira que les deux solutions de l'équation sont rationnelles si et seulement si $8n-3$ est le carré d'un entier naturel p.

Existe-t-il des valeurs de n telles que les deux solutions de l'équation $\Phi_n(x) = 0$ soient rationnelles (on pourra utiliser une relation de congruence) ?

N. B. : Dans la partie B, les questions 2. et 3. sont indépendantes de la question 1.