Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Poitiers

EXERCICE 1

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne suivante, notée $\star$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a\,;\,b) & \longmapsto & a \star b = \text{Log}\left(\text{e}^a+\text{e}^b\right) \end{array}$$

(e est la base des logarithmes népériens et Log x désigne le logarithme népérien du réel $x>0$).

1. Cette loi est-elle associative ?
   Résoudre l'équation : $x\star(x\star x)=0$
2. Mon trer qu'il existe un nombre réel x solution de l'équation $a=b\star x$ si et seulement si $a>b$.
   Lorsqu'elle existe, la solution est-elle unique ?
3. Vérifier l'égalité suivante :

$$a+(b\star c)=(a+b)\star(a+c)$$

   quels que soient les réels a, b, c.
   L'addition des réels est-elle distributive par rapport à la loi $\star$?

EXERCICE 2

D'une urne contenant n boules blanches et n boules noires, un joueur tire successivement 6 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
S'il tire une boule blanche, il marque 2 points, dans le cas contraire il perd 3 points.
Soit S la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par le joueur en une partie.

1. **a.** Dresser le tableau définissant la loi de probabilité de la variable aléatoire S.
   b. Calculer l'espérance mathématique de S, soit E(S), ainsi que la variance de S, soit V(S).
2. **a.** A l'aide de ce tableau, calculer la probabilité de l'évènement

$$|\text{S}-\text{E(S)}|\geqslant 9$$

   b. En déduire la probabilité de l'évènement

$$|\text{S}-\text{E(S)}|<9$$

N. B. - À tout tirage, il y a équiprobabilité de tirer chacune des boules de l'urne.

PROBLÈME

À toute fonction numérique f, définie et continue sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction φ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,\text{d}t.$$

On désigne par Im f (resp. Im φ) l'ensemble des réels ayant un antécédent par f (resp . φ).

Partie A

1. **a.** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in [x\,;\ x+1], \quad \varphi(x) = f(y).$$

b. En déduire que : $\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Im} f$.

c. Montrer que si f est bornée, φ est bornée.

2. On définit une nouvelle fonction numérique F par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Exprimer φ à l'aide de F. En déduire que φ est dérivable et que $\varphi'(x) = f(x+1) - f(x)$.

b. Montrer que, si f est monotone, φ est monotone.

c. Montrer que, si f est périodique de période 1, φ est constante.

Partie B

On se propose d'étudier les fonction f et φ dans des cas particuliers.

1. On donne f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}.$$

a. Représenter graphiquement f et montrer que la courbe obtenue admet un centre de symétrie.

b. Montrer qu'il existe deux réels fixes, A et B, tels que

$$f(x) = A + \frac{Bx}{x^2+1}$$

En déduire $\varphi(x)$.

c. Calculer $\varphi(x-1) + \varphi(x)$; pouvait-on prévoir ce résultat ?

d. Étudier et représenter graphiquement la fonction φ.

2. Si a est un réel fixé,on donne $f(x) = \sin ax$.

a. Calculer $\varphi(x)$.

b. Que peut-on dire de φ si $a = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$?

N. B. - Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment ; les numéros 1. et 2. du B sont indépendants l'un de l'autre.