Baccalauréat C Poitiers juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On considère l'équation :

$$(\mathrm{i}-1)z^2-2\mathrm{i}(m+1)z+(1+\mathrm{i})\left(m^2+1\right)=0$$

dans laquelle z est l'inconnue, et m un paramètre complexe.

1. Résoudre cette équation dans le corps des nombres complexes. On désignera par z_1 et z_2 les racines, z_2 étant la racine qui devient réelle quand on substitue 0 à m.
2. Établir une relation indépendante de m liant les racines z_1 et z_2. Soit M_1 et M_2 les images respectives de z_1 et z_2 dans un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$. Montrer que M_2 se déduit de M_1 par une transformation que l'on caractérisera avec précision.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Si deux entiers naturels sont premiers entre eux, montrer qu'il en est de même de leur somme et de leur produit.
En déduire l'ensemble des paires $\{a~;~b\}$ d'entiers naturels tels que

$$\left\{\begin{array}{l c l}a+b&=&96\\ \text{PPCM}\,(a~;~b)&=&180\end{array}\right.$$

PROBLÈME **14 POINTS**

Dans une large mesure, les parties A et B sont indépendantes

Dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ on considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(a~;~0)$, $(0~;~b)$ et $(0~;~-ab)$, où a et b sont deux nombres réels non nuls.

Partie A

1. **a.** Montrer qu'il existe une application affine de P dans P et une seule, notée $f_{a,\,b}$, telle que $f_{a,\,b}(\mathrm{A})=\mathrm{A}$, $f_{a,\,b}(\mathrm{B})=\mathrm{B}$ et $f_{a,\,b}(\mathrm{O})=\mathrm{C}$.

   b. Quelle est l'image par $f_{a,\,b}$ du barycentre M des points A et B affectés respectivement des coefficients λ et $1-\lambda$?

   En déduire que tout point de la droite (AB) est invariant par $f_{a,\,b}$.

   c. Si M est un point de coordonnées $(x~;~y)$, et si M', de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$, est son image par $f_{a,\,b}$, montrer que

$$\left\{\begin{array}{l c l}x'&=&x\\ y'&=&bx+(a+1)y-ab\end{array}\right.$$

2. Calculer les coordonnées de $f_{a,\,b}\circ f_{a,\,b}(M)$.

   Montrer qu'il existe une unique valeur a_1 de a telle que $f_{a,\,b}$ soit une symétrie pour tout $b\neq 0$; caractériser cette symétrie.
3. On suppose dans cette question que $a\in\mathbb{R}-\{0~;~-1\}$ et $b\in\mathbb{R}-\{0\}$.

   a. Démontrer que l'application $f_{a,\,b}$ est bijective.

b. On se donne un point M_0 de coordonnées $\left(x_0 \,:\, y_0\right)$ n'appartenant pas à la droite (AB), et on pose $M_1 = f_{a,\,b}\left(M_0\right)$? Montrer que M_1 est différent de M_0 et que la droite $\left(M_0M_1\right)$ coupe la droite (AB) en un point H dont on calculera les coordonnées en fonction de x_0, a et b.

Calculer le nombre réel k tel que $\overrightarrow{HM_1} = k\overrightarrow{HM_0}$ et montrer qu'il est indépendant de M_0.

c. En partant du point M_0 de la question précédente, on définit, par récurrence, $M_n = f_{a,\,b}\left(M_{n-1}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Calculer les coordonnées X_n et Y_n de $\overrightarrow{HM_n}$.

Quel est l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la suite de terme général $u_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$ a une limite finie quand n augmente indéfiniment ?

Calculer alors cette limite en fonction de x_0, y_0, a et b.

Partie B

Dans cette seconde partie, on suppose $a = -2$.
Soit h_b l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_b(x) = -\text{e}^{2x} + 2\text{e}^{x} + \frac{b}{2}x.$$

On désigne par C_b la courbe représentative de h_b dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que la courbe C'_b transformée de C_b par $f_{-2,\,b}$ a pour équation

$$y = g_b(x) \quad \text{avec} \quad g_b(x) = \text{e}^{2x} - 2\text{e}^{x} + \frac{b}{2}x + 2b.$$

2. Étudier les variations de g_{-3}.
3. Dans ce cas particulier, représenter sur une même figure la droite (AB) et la courbe C'_{-3} ; on pourra prendre le centimètre pour unité de longueur.
4. Démontrer que la droite (AB) et la courbe C'_{-3} ont un seul point commun I dont on calculera les coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$. Montrer sans calculs, mais en utilisant les résultats obtenus à la question A 3. b., que $\{\text{I}\} = C_{-3} \cap C'_{-3}$.

   Calculer alors l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que

$$0 \leqslant x \leqslant \alpha$$

   et

$$g_{-3}(x) \leqslant y \leqslant h_{-3}(x).$$