

∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1979 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit A l'entier naturel qui s'écrit $\overline{1x5y4}$ dans le système de numération à base six. Déterminer tous les couples $(x; y)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que :

1. A soit divisible par 33.
2. A soit divisible par 70.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x - 1) + (x + 1)e^{-x}.$$

1. Démontrer que f est dérivable dans \mathbb{R} et étudier le sens de variations de sa fonction dérivée f' . En déduire le signe de f' .
2. Étudier la fonction f , et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé,
3. Démontrer que f possède une fonction réciproque g , que l'on ne cherchera pas à calculer et dont on précisera les propriétés (ensemble de définition, sens de variations, continuité, dérivabilité).

PROBLÈME

13 POINTS

Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par B l'ensemble des éléments z du corps \mathbb{C} des nombres complexes tels que $|z| < 1$.

Pour tout nombre complexe a , on appelle f_a la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f_a(z) = \frac{z + a}{az + 1}$$

et on désigne par F_a la fonction de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f_a(z)$.

On rappelle que, si M a pour coordonnées $(x; y)$, son affixe est $z = x + iy$

Partie A

1. Préciser F_0 ; pour quelles valeurs de a , F_a est-elle une fonction constante?
2. Quel est, suivant les valeurs de a , l'ensemble des points invariants par F_a ?
3. On suppose que a est un nombre réel de l'intervalle $] -1; 1[$.
 - a. Montrer que la restriction h_a de f_a à B est une fonction de B dans B .
Vérifier que son ensemble de définition est B .
 - b. On appelle H l'ensemble des applications h_a lorsque a décrit $] -1; 1[$.
Montrer que H muni de la composition des applications, est un groupe commutatif en précisant l'élément neutre et le symétrique d'un élément h_a quelconque de H .
Le nombre complexe a étant de nouveau quelconque, montrer que la restriction g_a de a à \mathbb{R} est une fonction à valeurs réelles si et seulement si a est un réel.

Partie B

On suppose désormais que a est un nombre réel non nul appartenant à $] -1 ; 1[$.

On pose $g_a(x) = \frac{x+a}{ax+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et on note C_a la courbe représentative de g_a dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la fonction g_a , et tracer sur le même dessin les deux courbes $C_{\frac{1}{2}}$ et $C_{-\frac{1}{2}}$.
2. Montrer que C_a et C_{-a} sont isométriques.
3. Trouver un réel b tel que : $\frac{x+a}{ax+1} = \frac{1}{a} + \frac{b}{ax+1}$ pour tout x de \mathbb{R} .
4. Calculer l'aire géométrique de la partie du plan délimitée par C_a et C_{-a} .

Partie C

Soit φ l'application affine de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' &= x + y - \frac{1}{a} \\ y' &= -x + y - \frac{1}{a} \end{cases}$$

1. Préciser la nature de φ et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer une équation de l'image C'_a de C_a par φ . Quelle est la nature de C'_a ? Préciser ses éléments caractéristiques.

Construire C'_a en prenant $a = \frac{1}{2}$.