

## ∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1981 ∞

### EXERCICE 1

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par  $f_n$  la fonction d'une variable réelle  $x$  telle que

$$f_n(x) = \text{Log} \frac{2+x}{2-x} - n \text{Log}(x+n)$$

(où Log désigne la fonction logarithme népérien).

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f_n$ ? Étudier les limites et déterminer le tableau de variations de  $f_n$ . (on distinguera le cas  $n = 2$ ). (On ne demande pas de construire la courbe).
2. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2+x}{2-x}$$

pour tout  $x$  appartenant à  $[0; 2[$ .

(On pourra utiliser, à condition de la justifier, la propriété  $f_n(x) \geq f_n(0)$  pour tout  $x$  appartenant à  $[0; 2[$ .)

### EXERCICE 2

1. Un dé cubique A porte inscrits sur ses faces les nombres :  $-2, 1, 1, 1, 2n, -n$  (où  $n$  est un entier relatif).  
On suppose qu'à chaque lancer, les faces de A ont même probabilité d'apparition.
  - a. On lance une fois le dé A et on note X le nombre obtenu. On définit ainsi une variable aléatoire.
    - Déterminer la loi de probabilité de X, en fonction du paramètre  $n$ .
    - Déterminer  $n$  pour que l'espérance mathématique de X soit nulle.Dans la suite, on donnera à  $n$  cette valeur.
  - b. On lance A six fois de suite. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus quatre fois le nombre 1.
2. Soit B un autre dé cubique dont les faces portent les nombres  $-3, -2, -1, 1, 2, 3$  de telle sorte que les probabilités d'apparition respectives de ces nombres soient six termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .
  - a. Déterminer la probabilité d'apparition de chacune des faces de B.
  - b. On lance simultanément les dés A et B. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à  $-2$ ?  
Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à  $-1$ ?

**PROBLÈME****Partie A**

Soit  $u$  la fonction numérique d'une variable réelle qui à  $x$  associe

$$u(x) = \frac{x-3}{x-1}.$$

1. Soit  $h$  et  $h_1$  les fonctions définies par

$$\begin{aligned} h(x) &= u(\operatorname{tg} x), \\ h_1(x) &= \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x - \cos x} \end{aligned}$$

Montrer que  $h$  et  $h_1$  coïncident sur une partie de  $\mathbb{R}$  à préciser.

Étudier la fonction  $h$ , établir le tableau de ses variations et tracer sa courbe représentative.

2. a. Soit  $v$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . À quelle condition supplémentaire doit satisfaire la fonction  $v$  pour que  $u \circ v$  soit dérivable sur  $I$ ? Préciser, lorsqu'il en est ainsi, la dérivée de  $u \circ v$ .
- b. On note

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^x \frac{2}{(t-1)^2} dt \\ K(x) &= \int_{-1}^x \frac{e^t}{(e^t-1)^2} dt. \end{aligned}$$

Calculer  $J(x)$  et  $K(x)$  en précisant les valeurs de  $x$  pour lesquelles ces intégrales sont définies.

**Partie B**

Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Dans  $\mathcal{P}$  on désigne respectivement par  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$  les courbes d'équations :

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-3}{x-1} \\ xy &= -2, \\ x^2 - y^2 &= -4. \end{aligned}$$

1. Précisez la nature de la conique  $\mathcal{H}_3$  son excentricité, ses sommets, ses asymptotes, ses foyers et les directrices associées.
2. On désigne par  $r$  la rotation de centre  $O$  dont une mesure de l'angle est  $\frac{\pi}{4}$ , et par  $r^{-1}$  la transformation réciproque de  $r$ .  
Étant donné un point  $M$  de coordonnées  $(X; Y)$  quelles sont les coordonnées  $(x; y)$  de  $m = r^{-1}(M)$ ?  
Quelle est l'équation de la transformée de  $\mathcal{H}_3$  par  $r$ ?
3. Soit  $A, B$  et  $C$  les points de coordonnées  $A(1; 0)$ ,  $B(1; 1)$  et  $C(0; 1)$ . On se propose de déterminer l'ensemble  $\mathcal{F}$  des déplacements du plan  $\mathcal{P}$  qui transforment la paire de droites  $\{(BA), (BC)\}$  en la paire  $\{(OA), (OC)\}$ .
- a. Quelle est l'image de  $B$  par un élément de  $\mathcal{F}$ ?

- b. Montrer qu'il existe un déplacement unique  $f_1$  d'endomorphisme associé  $\varphi_1$ , tel que  $f_1(B) = O$  et  $\varphi_1(\vec{i}) = \vec{i}$ , et que  $f_1$  appartient à  $\mathcal{F}$ .
- c. Montrer qu'il n'existe que trois autres déplacements  $f_2, f_3, f_4$  qui appartiennent à  $\mathcal{F}$  (en préciser les angles et les centres).
4. a. Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des déplacements du plan qui transforment  $\{(BA), (BC)\}$  en la paire des bissectrices des axes de coordonnées. Dédurre des questions précédentes le nombre et la nature (sans autres précisions) des éléments de  $\mathcal{G}$ .
- b. Soit  $m$  un point de coordonnées  $(x ; y)$ . Préciser les coordonnées de son image  $M$  par  $r^{-1} \circ f_1$ . Préciser la nature et les éléments caractéristiques de  $r^{-1} \circ f_1$ .
- c. Montrer que  $\mathcal{H}_1$  est transformée en  $\mathcal{H}_3$  par  $r^{-1} \circ f_1$ . Combien y a-t-il de déplacements transformant  $\mathcal{H}_1$  en  $\mathcal{H}_3$  (on admettra qu'un tel déplacement transforme toute asymptote de  $\mathcal{H}_1$  en une asymptote de  $\mathcal{H}_3$  ?

**N.B. - Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre**