

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Poitiers ∞

EXERCICE 1

4 points

- En supposant que $a = 9p + 4q$ et $b = 2p + q$, démontrer que les entiers a et b d'une part; p et q d'autre part ont le même PGCD.
 - Démontrer que les entiers $9p + 4$ et $2p + 1$ sont premiers entre eux. Quel est leur PPCM?
- Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p + 4$ et $2p - 1$ en fonction des valeurs de p .

EXERCICE 2

4 points

Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose de déterminer l'ensemble E des points M de ce plan dont les affixes $z = x + iy$ (x et y réels) vérifient

$$|(1 + i)z - 2i| = 2.$$

Les deux questions proposent chacune une méthode et peuvent être résolues de façon indépendante l'une de l'autre.

- Calculer le carré du module du complexe $(1 + i)z - 2i$ en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M . Déterminer E par une équation cartésienne. Reconnaître E puis le dessiner.
- On note s la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et t la translation de vecteur $-2\vec{v}$.
 - Un point M ayant pour affixe z , calculer l'affixe du point $s(M)$ puis l'affixe du point $t \circ s(M)$.
 - Soit C l'ensemble des points M' d'affixe z' tels que $|z'| = 2$. Reconnaître C et le dessiner. Déterminer l'ensemble $t \circ s(E)$; en déduire l'ensemble E.

PROBLÈME

12 points

Un plan affine est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé; pour exécuter les figures on prendra pour unité de longueur 2 cm.

On donne le point A de coordonnées (1; 1).

Partie A

- α étant un réel donné non nul, soit D la droite d'équation $x = \alpha$.
Montrer qu'il existe une application affine f_α , et une seule, que l'on déterminera, qui satisfait aux deux conditions

$$f_\alpha(0) = A \quad \text{et} \quad \forall M \in D \quad \overrightarrow{Mf_\alpha(M)} = \vec{i}.$$

- On considère l'application f qui, au point M de coordonnées $(x; y)$ fait correspondre $M' = f(M)$ de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$x' = x + 1 \quad \text{et} \quad y' = x + y + 1.$$

Vérifier que $f = f_\alpha$ dans le cas $\alpha = -1$. Montrer que f est une bijection du plan affine.

Y a-t-il des points invariants par f ? Quelle est la matrice de l'endomorphisme φ associé à f ?

3. a. Vérifier que, quel que soit le réel λ , les vecteurs $(\vec{i} + \lambda \vec{j})$ et $\varphi(\vec{i} + \lambda \vec{j})$ forment une famille libre.
- b. Soit Δ une droite affine du plan : donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit parallèle à son image $f(\Delta)$?
4. Chercher l'image $f(\Delta)$ de la droite Δ dans chacun des cas suivants :
- a. Δ a pour équation $x = k$. Montrer que, si M appartient Δ , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur constant \vec{u}_k dont on donnera les coordonnées.
- b. Δ a pour équation $y = k'$.
- c. Δ a pour équation $y = tx$; calculer dans ce cas les coordonnées du point P d'intersection des droites Δ et $f(\Delta)$ en fonction de t . Quel est l'ensemble Π décrit par P lorsque t décrit \mathbb{R} ?
- Figure* : représenter Π . Tracer les droites Δ et $f(\Delta)$ dans le cas des droites L ayant respectivement pour équation $x = -1$, $y = -1$, $y = -2x$.
5. Faire une nouvelle figure.
On appelle M_0 l'origine du repère et l'on pose

$$M_1 = f(M_0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n = f(M_{n-1}).$$

Soit $(x_n; y_n)$ les coordonnées de M_n . Calculer les coordonnées de M_1, M_2, M_3 . Exprimer x_n et y_n en fonction de x_{n-1} et y_{n-1} .
En déduire x_n et y_n en fonction de n .

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, M_n appartient à la courbe C d'équation $y = \frac{x(x+1)}{2}$. Reconnaitre C et la dessiner.

6. a. Soit g une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . En utilisant une primitive G de g , établir l'égalité

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g(x) dx = \int_{\lambda_1+1}^{\lambda_2+1} g(x-1) dx.$$

λ_1 et λ_2 réels donnés.

- b. Si une courbe Γ a pour équation $y = h(x)$, montrer que son image $f(\Gamma)$ a pour équation $y = h(x-1) + x$.
Quelle est l'image de la courbe C du 5. ?
- c. Cas particulier : soit E_n la région du plan comprise entre la courbe C et le segment $[M_{n-1} M_n]$; hachurer sur la figure les régions E_1, E_2, E_3, E_4 .
Déduire du a. et du b. ci-dessus que l'aire de E_n est indépendante de n . Quelle est sa valeur ?

Partie B

On considère l'application h_0 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$h_0(x) = e^{-x} - 1;$$

soit Γ sa représentation graphique. Montrer que son image $f(\Gamma)$ est la représentation de l'application h_1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$h_1(x) = e^{-x} - 1 + x.$$

Étudier les applications h_0 et h_1 ; représenter sur la même figure Γ et $f(\Gamma)$, en dessinant soigneusement l'asymptote de chacune d'elles.

λ étant un réel, supérieur à 1, calculer en fonction de λ l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan dont les frontières sont les droites $x = 1$ et $x = \lambda$, la courbe $f(\Gamma)$ et son asymptote.
Montrer que, lorsque λ tend vers $+\infty$, $\mathcal{A}(\lambda)$ a une limite à déterminer.