

œ Baccalauréat C Poitiers septembre 1972 œ

EXERCICE 1

Résoudre dans l'ensemble \mathbb{Z} , des entiers relatifs l'équation

$$x^2 - 4y^2 = 36.$$

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, de coordonnées $(0; \sqrt{3})$, et B, de coordonnées $(1; 0)$.

On désigne par R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et par R_2 la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Montrer que la composée $R_2 \circ R_1$ de R_1 puis de R_2 est une rotation, dont on précisera l'angle et le centre, ω .

Démontrer que l'image $(A'B')$ du couple de points (AB) par la rotation $R_2 \circ R_1$ est telle que la droite $(A'B')$ soit la médiatrice du segment [AB].

PROBLÈME

Dans le plan affine euclidien (P) rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A et B de coordonnées respectives $(a; 0)$ et $(-a; 0)$, où a désigne un nombre réel strictement positif. Au point M de coordonnées $(x; y)$ on fait correspondre, quand cela est possible, le point M' , intersection de la perpendiculaire en A à (AM) et de la perpendiculaire en B à (BM) .

1. Calculer, en fonction de x et de y , les coordonnées de M' . Quel est l'ensemble (D) des points M pour lesquels le point M' existe, et est unique?
Quel est l'ensemble (F) des points M pour lesquels le point M' est en A ou en B?
2. On considère l'application f , de (D) dans (P), $M(x; y) \mapsto M'(X; Y)$ définie par

$$\begin{cases} X &= -x \\ Y &= \frac{x^2 - a^2}{y} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un sous-ensemble (E) de (D) tel que la restriction, φ , de f à (E) soit involutive. [On rappelle que φ est définie $\forall M \in E$ par $\varphi(M) = f(M)$.]

Existe-t-il des points invariants par φ ?

3. Quelle est l'image par f de l'intersection avec (D)
 - a. d'une droite (Δ_1) parallèle à l'axe des abscisses (O, \vec{i}) ?
 - b. d'une droite (Δ_2) parallèle à l'axe des ordonnées (O, \vec{j}) ?
 - c. d'une droite (Δ_3) passant par A?
 - d. de la droite (Δ_4) d'équation $y = X$?; dans ce dernier cas, construire l'image (C) de (Δ_4) ;
 - e. d'un cercle passant par A et B?
 - f. de l'hyperbole (H) d'équation $y = \frac{1}{x}$?

4. On suppose maintenant que $a = \sqrt{2}$. Construire l'image (H') de $(H) \cap (D)$ par f .
Étudier l'intersection de (H) et de (H') , (H') étant définie par

$$\begin{cases} y = g(x), \\ x = 0. \end{cases}$$

Calculer, à 10^{-3} près, l'aire du domaine plan défini par

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ g(x) \leq y \leq \frac{1}{x}. \end{cases}$$