Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1975 Poitiers

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x\mathrm{e}^{-1/|x|} \quad \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE 2

On donne l'équation à coefficients complexes :

$$(E) \quad z^3(\mathrm{i}-1) - z^2(5\mathrm{i}-11) - z(43+\mathrm{i}) + 9 + 37\mathrm{i} = 0.$$

1. Vérifier que i est solution de l'équation (E).
2. Résoudre (E).

PROBLÈME

Partie A

On considère l'ensemble F des endomorphismes f d'un plan vectoriel $\mathcal{V}$ vérifiant : $f \circ f = H_{-1}$ où H_{-1} désigne l'homothétie vectorielle de rapport (-1), on désignera par I l'application identique dans $\mathcal{V}$.

1. Montrer que f est bijectif. f peut-il être involutif ?
2. Soit $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$.
   Montrer que l'ensemble $\Phi = \left\{f, f^2, f^3, f^4\right\}$, muni de la loi $\circ$, est un groupe commutatif.
   Montrer que f^{-1} est un élément de F. I est-elle un élément de F ?
   F, muni de la loi $\circ$, est-il un groupe ?
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. Montrer que $\left(\vec{u}, f\left(\vec{u}\right)\right)$ est une base de $\mathcal{V}$. Quelle est la matrice de f par rapport à cette base ?
4. Soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une base de $\mathcal{V}$. On pose $f\left(\vec{\imath}\right) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$. Montrer qu'on a nécessairement : $b \neq 0$ et former la matrice de f par rapport à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. En déduire celle de f^{-1}.

Partie B

$\mathcal{V}$ est un plan vectoriel euclidien orienté et $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée directe.

1. Quelles sont les transformations orthogonales de F ? Déterminer les valeurs des couples $(a\,;\,b)$ correspondantes.
2. Lorsque f n'est pas une transformation orthogonale de F, soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathcal{V}$. On désigne par α une mesure de l'angle $\widehat{\left(\vec{\imath}, \vec{u}\right)}$.

a. Montrer qu'il existe des valeurs de α pour lesquelles $\overrightarrow{u}$ et $f\left(\overrightarrow{u}\right)$ sont orthogonaux.

b. $\overrightarrow{u}$ étant l'un des vecteurs définis en a. on considère la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On pose $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{v}$.

Quelle est la matrice de f par rapport à la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$? Peut-on avoir $|\lambda| = 1$?

c. Soit E un plan affine associé à $\mathcal{V}$ et O un point de E. On considère l'application affine g admettant O comme point invariant et f comme endomorphisme associé. $(x\ ;\ y)$ étant le couple des coordonnées d'un point M de E, par rapport au repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, calculer les coordonnées x' et y' de $M' = g(M)$ par rapport au même repère.
Former l'équation de l'image Γ' du cercle Γ de centre O et de rayon 1 par g. Quelle est la nature de Γ' ?

d. On prend $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ et $b = 1$. Calculer les valeurs de α pour lesquelles $\overrightarrow{u}$ et $f\left(\overrightarrow{u}\right)$ sont orthogonaux, puis calculer λ et dessiner Γ'.