Durée : 4 heures

Baccalauréat C Poitiers septembre 1975

EXERCICE 1

Déterminer, pour $p = 1, 2, 3, 4$, les restes de la division de 5^p par 13.
En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre
$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

EXERCICE 2

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-|x|}.$$

1. Étudier cette fonction ; est-elle dérivable en 0 ?
   Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé ; préciser l'allure de la courbe C au voisinage du point d'abscisse 0.
2. Déterminer une primitive de la restriction de f à l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   Déterminer une primitive de la restriction de f à l'intervalle $]-\infty~;~0]$.
3. Définir la primitive de f qui s'annule en $x = 0$.
4. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine compris entre la courbe C, l'axe des abscisses $x'x$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = \lambda$, λ étant un réel positif.
   L'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ admet-elle une limite finie lorsque λ tend vers $+\infty$?

PROBLÈME

On considère un plan affine euclidien E orienté de base orthonormée directe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

La fonction vectorielle f de $\mathbb{R}$ dans E est définie par $f(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$ avec

$$\left\{\begin{array}{l c l} x(t) & = & \dfrac{1}{2^t}\cos\dfrac{\pi}{2}t\\ y(t) & = & \dfrac{1}{2^t}\sin\dfrac{\pi}{2}t \end{array}\right.$$

1. Cette fonction est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
   Préciser les limites, si elles existent, de $x(t)$ et de $y(t)$ quand $t \to +\infty$ et quand $t \to -\infty$.
2. Dans toute la suite du problème, **on se restreint à $t \in \mathbb{R}_+$** et on considère le mouvement d'un point $M(t)$ défini par $\overrightarrow{\text{O}M(t)} = f(t)$.
   a. Représenter $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$.
   b. Quelle est la vitesse du point $M(t)$ à l'instant 0 ? Préciser la tangente à la trajectoire en $M(0)$.
   c. Quelle est la norme du vecteur-vitesse ? Décrire le mouvement de M.
3. Démontrer que les intersections de la trajectoire avec les axes correspondent aux images $M(n)$ des nombres complexes définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

   $$z(n) = x(n) + \mathrm{i}y(n);$$

   préciser le module et l'argument de $z(n)$.

Partie B

On considère, dans E, les images $M(n)$ des nombres complexes définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$z(n) = \frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

1. Déduire de la relation entre $z(n)$ et $z(n+1)$, qu'il existe une similitude s telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad M(n+1) = s(M(n));$$

(on montrera que s est la similitude de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$).

2. Nature de $h = s \circ s$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\quad M(2(p+1)) = s \circ s(M(2p))$; que peut-on dire des points $M(2p)$?

3. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la trajectoire de $M(t)$ et de la droite D_α qui passe par l'origine et admet $\overrightarrow{v} = \cos\alpha\,\overrightarrow{\imath} + \sin\alpha\,\overrightarrow{\jmath}$ pour vecteur directeur.

b. Soit deux points d'intersection $M\left(t'\right)$ et $M\left(t''\right)$ de la droite D_α et de la trajectoire de $M(t)$, correspondant respectivement à deux valeurs consécutives t' et t'' $(t' < t'')$ de t.
Montrer que : $M\left(t''\right) = h\left(M(t')\right)$.

c. En déduire que la trajectoire de $M(t)$ est globalement invariante par h; l'est-elle aussi par s?