# Baccalauréat C Poitiers septembre 1976

**EXERCICE 1**

1. Montrer que si $a'$ et $b'$ sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors $(a' + b')$ est premier avec $a'b'$.
2. Déterminer les couples $(a\,;\, b)$ d'entiers naturels, admettant $m$ pour plus petit commun multiple et tels que :

$$5(a+b)^2 = 147m.$$

**EXERCICE 2**

Dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$, à tout point $M$ d'affixe $z = x + \text{i}y$, on associe le point $M'$ d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$ tel que :

$$z' = (3+2\text{i})z + 3\text{i}\overline{z} - 1.$$

1. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que 0, M, M' soient alignés.
2. Montrer que cet ensemble des points M est une conique dont on précisera les foyers, sommets, directrices et l'excentricité, Dessiner cet ensemble.

**PROBLÈME**

**Partie A**

À tout réel $m$, on associe l'application $f_m$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_m(x) = x + m\sin x.$$

On désigne par $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de $f_m$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que O est centre de symétrie pour $\mathscr{C}_m$.
2. Soit $\Gamma_k$ l'ensemble des points de $\mathscr{C}_m$ qui satisfont à

$$(2k-1)\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

   Montrer que $\Gamma_k$ se déduit de $\Gamma_0$ par une translation que l'on précisera.
3. **a.** Étudier, suivant les valeurs de $m$, le sens de variation de l'application $f_m$.
   **b.** Pour quelles valeurs de $m$, $f_m$ est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ?
   **c.** Construire les courbes représentatives des restrictions à $[-\pi\,;\, +\pi]$ de $f_{-2}$, $f_{1/2}$, $f_1$, $f_2$.
4. On suppose $m < -1$.
   **a.** Montrer que, lorsque $x$ décrit l'intervalle $\left[0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'ensemble des valeurs de $f_m$ possède un minimum $y_0$ pour $x_0 \in \left[0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Soit $N_m$ le point de coordonnées $\left(x_0\,;\, y_0\right)$ de $\mathscr{C}_m$. Montrer que ses coordonnées sont liées pour la relation :

$$y_0 = x_0 - \text{tg}\, x_0.$$

   Construire l'ensemble des points $N_m$, lorsque $m$ décrit l'intervalle $]-\infty\,;\, -1[$.

**b.** Montrer que :

$$\forall x \in [0\,;\,x]\,,\quad f_m(x) \leqslant x - \operatorname{tg} x.$$

Montrer que l'aire du domaine, ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que :

$$0 \leqslant x \leqslant x_0,\quad \text{et}\quad x + m\sin x \leqslant y \leqslant x - \operatorname{tg} x,$$

s'exprime à l'aide de $m$ seul.

**Partie B**

Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application $T$ de P dans P qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + \dfrac{1}{2}\sin x \\ y' & = & y + \dfrac{1}{2}\sin y. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $T$ est une bijection de P sur P. Déterminer l'ensemble des points invariants par $T$.
2. Soit $Q$ l'ensemble des points du plan P dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient $|x| < \pi$ et $|y| < \pi$ ? Montrer que la restriction de $T$ à $Q$ est une bijection de $Q$ sur $Q$. Préciser les points invariants de $Q$.

**Partie C**

Soit $S$ l'application de P dans P qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe $M'$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - y \\ y' & = & x + y. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $S$ est une similitude dont on précisera les éléments (centre, angle, rapport). Définir $S^{-1}$.
2. Soit $K$ l'ensemble des points du plan P dont les coordonnées vérifient :
ou bien $|x| = \pi$ et $|y| \leqslant \pi$, ou bien $|x| \leqslant \pi$ et $|y| = \pi$ ?
Construire sur une même figure : $K$, $S(K)$ et $S^{-1}(K)$, en justifiant cette construction.

**Partie D**

On note $F$ l'application de P dans P définie par $F = S^{-1} \circ T \circ S$.

1. Démontrer que si $M'\left(x'\,;\,y'\right)$ est l'image de $M(x\,;\,y)$ par $F$, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + \dfrac{1}{2}\sin x \cos y \\ y' & = & y + \dfrac{1}{2}\sin y \cos x. \end{array}\right.$$

2. Déduire des questions précédentes que $F$ est une bijection de P sur P et que $S^{-1}(Q)$ est globalement invariant par $F$.
3. Démontrer que la restriction de $F$ au domaine $Q$ a cinq points invariants que l'on précisera.