Baccalauréat C Poitiers septembre 1973

EXERCICE 1

Dans E, espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $B = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, montrer qu'il existe une rotation f ayant pour axe la droite vectorielle de base $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ et qui transforme $\vec{\imath}$ en $-\vec{\jmath}$.
Calculer $f\left(\vec{k} - \vec{\jmath}\right)$.
Calculer $f\left(\vec{k} + \vec{\jmath}\right)$ (on pourra remarquer que $\left(\vec{k} - \vec{\jmath}\right) \wedge \vec{\imath} = \vec{k} + \vec{\jmath}$).
En déduire $f\left(\vec{\jmath}\right)$ et $f\left(\vec{k}\right)$.

EXERCICE 2

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des entiers relatifs le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll} 3x & \equiv & 1 & [4],\\ 2x & \equiv & 4 & [5].\end{array}\right.$$

PROBLÈME

Partie A

1. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$\frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n-1}$$

2. On pose

$$\alpha_n = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}, \quad \beta_n = \log n, \quad \gamma_n = 1 + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

Déduire de **1.** que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$\alpha_n \leqslant \text{et } a_n \leqslant \gamma_n.$$

3. On sait que $\beta_n = \log n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Démontrer que α_n et γ_n tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie A

1. Etudier la fonction

$$g(x) = \frac{1}{x} - \log\frac{x+1}{x}$$

et tracer la courbe représentative.
Faire de même pour la fonction

$$h(x) = \frac{1}{x-1} - \log\frac{x+1}{x}.$$

Montrer que les graphes de g et de h sont symétriques par rapport au point $\left(-\frac{1}{2}~;~0\right)$.

2. Déduire du A **1.** ou du B **1.** que la suite de terme général

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} \quad (n \geqslant 2)$$

est croissante, et que la suite de terme général

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n \quad (n \geqslant 2)$$

est décroissante.

3. Démontrer que, pour n supérieur ou égal à 2, on a

$$U_n \leqslant 1 \quad \text{et} \quad V_n \geqslant 0.$$

(on pourra utiliser A **2.**)

4. On admet que toute suite croissante majorée à une limite, et que toute suite décroissante minorée a une limite.

En déduire que les suites (U_n) et (V_n) ont chacune une limite.

Démontrer que ces limites sont égales à un nombre C de l'intervalle $]0\,;\,1[$.

On donne $\log 2 \approx 0,70$ à 10^{-2} près par excès.

5. Montrer qu'il existe un nombre $\theta_n \in]0\,;\,1[$ tel que

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n = C + -\frac{\theta_n}{n}.$$

Quelle valeur faut-il donner à n pour être sûr d'avoir une valeur approchée de C à 10^{-3} près par excès ?