

☞ Baccalauréat C Poitiers septembre 1978 ☞

EXERCICE 1

3 POINTS

Soient a et b deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux; en déduire que les nombres $a+b$ et a^2-ab+b^2 sont premiers entre eux ou divisibles par 3.
2. Démontrer l'égalité :

$$\text{P.G.C.D.}(a+b; a^2-ab+b^2) = \text{P.G.C.D.}(a+b; 3).$$

EXERCICE 2

3 POINTS

Dans un plan affine \mathcal{P} muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B définis par $\vec{OA} = a^2 \vec{i}$ et $\vec{OB} = a \vec{j}$, où a est un nombre réel donné.

1. Un point M de coordonnées x et y étant donné, discuter l'existence d'un point M' vérifiant

$$\vec{M'A} + \vec{M'B} + a \vec{M'M} = 0,$$

selon la valeur de a et la position de M .

2. Lorsqu'elle est définie, on appelle f l'application qui à un point M de \mathcal{P} fait correspondre le point M' de \mathcal{P} défini par la relation de la question précédente.
Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .

PROBLÈME

14 POINTS

Les parties A et B sont largement indépendantes.

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté, dont $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe. Pour tout nombre réel m , on considère l'application linéaire φ_m de E dans E définie par :

$$\begin{cases} \varphi_m(\vec{i}) &= \frac{1}{3} [m \vec{i} + (m+1) \vec{j} + 2 \vec{k}] \\ \varphi_m(\vec{j}) &= \frac{1}{3} [-2 \vec{i} - m \vec{j} + (m+1) \vec{k}] \\ \varphi_m(\vec{k}) &= \frac{1}{3} [(m+1) \vec{i} - 2 \vec{j} + m \vec{k}]. \end{cases}$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées $(X'; Y'; Z')$ de l'image par φ d'un vecteur \vec{u} de coordonnées $(X; Y; Z)$.
b. Démontrer que les vecteurs $\varphi_m(\vec{i}), \varphi_m(\vec{j}), \varphi_m(\vec{k})$ sont linéairement indépendants pour tout m .
L'application φ_m est-elle bijective pour tout m ?
2. Montrer qu'il existe exactement deux valeurs m_1 et m_2 ($m_2 < m_1$) de m telles que φ_{m_1} et φ_{m_2} soient des transformations orthogonales de E. Établir que φ_{m_1} est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe.

3. On s'intéresse au cas où $m = 1$, et on pose $\varphi_m = \varphi_{m_1}$. Soit D l'ensemble des vecteurs invariants par φ , et P le plan vectoriel orthogonal à D. On considère les vecteurs :

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{k}), \quad \vec{v} = \vec{j}, \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{k}).$$

- a. Vérifier que \vec{w} appartient à D, et donner une équation cartésienne de P relativement à B.
b. En considérant l'endomorphisme ψ de E défini par

$$\psi(\vec{i}) = \vec{u}, \quad \psi(\vec{j}) = \vec{v} \quad \text{et} \quad \psi(\vec{k}) = \vec{w},$$

montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de E.

- c. Dans toute la suite, on oriente D par \vec{w} et, par convention, (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormée directe de P.

On désigne par φ' la restriction de φ à P. Si α est une mesure de l'angle de φ (ou de φ') dans P ainsi orienté, déterminer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

Partie B

On désigne par \mathcal{P} un plan affine euclidien de direction P rapporté au repère orthonormé direct $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ (le point O appartient à \mathcal{P}).

Soit f l'application de \mathcal{P} dans lui-même, qui, au point M de coordonnées $(x; y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}y \\ y' &= \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{3}y \end{cases}$$

1. Déterminer la nature de f et en déduire l'existence et la définition analytique de son application réciproque.
2. a. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \frac{7\sqrt{2}}{8} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right).$$

Étudier les variations de g , et tracer sa courbe représentative C dans le plan \mathcal{P} rapporté à R.

- b. Montrer que la courbe C' image de C par f a pour équation cartésienne

$$x^2 - 8y^2 - 7 = 0.$$

3. On considère un point mobile N de \mathcal{P} dont les coordonnées à l'instant t (t décrivant \mathbb{R}) sont données par :

$$\begin{cases} x = x(t) &= 4e^t + e^{-t} \\ y = y(t) &= 2e^t - \frac{1}{2}e^{-t}. \end{cases}$$

- a. À quels instants t le point N est-il sur C' ?

- b.** Vérifier que le support Γ de la trajectoire T de N a pour équation cartésienne

$$x^2 - 4y^2 - 16 = 0.$$

Identifier Γ (nature, centre, sommets, axes de symétrie, asymptotes éventuelles).

Tracer Γ et préciser T (on démontrera que $x(t)$ et $y(t)$ décrivent respectivement $[4 ; +\infty[$ et \mathbb{R} , lorsque t décrit \mathbb{R}).

- c.** Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de N à l'instant t , et en déduire l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles le mouvement est accéléré.