

∞ **Baccalauréat C Poitiers juin 1966** ∞  
**Mathématiques et mathématiques et technique**

**EXERCICE 1**

Déterminer les fonctions  $y$  de la variable  $x$  vérifiant l'équation

$$2y' + 3y = 0.$$

Soit  $y_1$  la fonction  $y$  particulière qui prend la valeur  $e$  ( $e$  : base des logarithmes népériens) lorsque  $x = -\frac{2}{3}$ .

Étudier cette fonction et construire son graphe.

Préciser, à  $10^{-4}$  près, la valeur de  $y_1$  pour  $x = 1$ .

Montrer que tous les graphes des fonctions  $y$  se déduisent du graphe de la fonction  $y_1$  par une transformation géométrique simple.

**EXERCICE 2**

On donne, dans un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$ , le cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $a$  ( $a > 0$ ). On appelle  $(D)$  la polaire d'un point  $M$  par rapport à  $(C)$ ,  $H$  le point d'intersection de  $(D)$  et  $OM$ .

1. On suppose que  $M$  décrit un cercle  $(\Gamma)$ . Trouver l'ensemble des points  $H$  et l'enveloppe de la droite  $(D)$ .

Discuter la nature de cette enveloppe suivant la position de  $O$  par rapport à  $(\Gamma)$ .

2. Soit  $x_0 ; y_0$  les coordonnées de  $M$ ; établir l'équation de  $(D)$ . [R décrivant la droite  $(D)$ , on pourra utiliser le produit scalaire  $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OM}$ .]

Calculer, en fonction de  $x_0$  et  $y_0$ , les coordonnées des points  $P$  et  $Q$  d'intersection de  $(D)$  avec  $Ox$  et  $Oy$ .

Montrer analytiquement que, si  $(D)$  passe par un point fixe de coordonnées  $p$  et  $q$ ,  $M$  décrit une droite fixe, dont on formera l'équation en fonction de  $p$  et  $q$ . Expliquer géométriquement le résultat.

3. Soit  $M'$  le quatrième sommet du rectangle  $OPM'Q$  construit sur  $OP$  et  $OQ$  comme côtés. Calculer les coordonnées de  $M'$  en fonction des coordonnées  $x_0$  et  $y_0$  de  $M$ .

Montrer que l'on a ainsi défini une transformation ponctuelle associant  $M'$  à  $M$ .

Comment doit-on choisir  $M$  pour que  $M'$  soit défini?

La transformation est-elle involutive?

Quels sont ses points doubles?

Trouver, en fonction de  $x_0$  et  $y_0$ , l'équation du cercle  $(L)$  de diamètre  $MM'$  et montrer que la puissance de l'origine par rapport à ce cercle est constante.

En déduire que le cercle  $(L)$  est orthogonal à un cercle fixe.

On suppose que le milieu de  $MM'$  décrit une droite  $(\Delta)$ . Montrer que le cercle  $(L)$  appartient alors à un faisceau, dont on discutera la nature suivant la distance de  $O$  à  $(\Delta)$ . Donner une construction simple des points remarquables de ce faisceau dans chaque cas.

4. Montrer que, si  $M$  décrit une droite d'équation  $ux + vy + w = 0$ ,  $M'$  décrit une hyperbole, dont on donnera l'équation en fonction de  $u, v$  et  $w$ . Soit  $(H)$  l'hyperbole correspondant à la droite

$$x + 2y - a = 0.$$

Construire (H) dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

Déterminer, à  $\frac{1}{100}$  près par défaut, l'aire (S) comprise entre (H), l'axe des abscisses et les droites  $x = 0$  et  $x = -3$ .