

☞ Baccalauréat C Poitiers¹ juin 1966 ☞
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Déterminer les fonctions y de la variable x vérifiant l'équation

$$2y' + 3y = 0.$$

Soit y_1 la fonction y particulière qui prend la valeur e (e : base des logarithmes népériens) lorsque $x = -\frac{2}{3}$.

Étudier cette fonction et construire son graphe.

Préciser, à 10^{-4} près, la valeur de y_1 pour $x = 1$.

Montrer que tous les graphes des fonctions y se déduisent du graphe de la fonction y_1 par une transformation géométrique simple.

EXERCICE 2

On donne, dans un repère orthonormé (Ox, Oy) , le cercle (C) de centre O et de rayon a ($a > 0$). On appelle (D) la polaire d'un point M par rapport à (C) , H le point d'intersection de (D) et OM .

1. On suppose que M décrit un cercle (Γ) . Trouver l'ensemble des points H et l'enveloppe de la droite (D) .

Discuter la nature de cette enveloppe suivant la position de O par rapport à (Γ) .

2. Soit x_0 ; y_0 les coordonnées de M ; établir l'équation de (D) . [R décrivant la droite (D) , on pourra utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OM}$.]

Calculer, en fonction de x_0 et y_0 , les coordonnées des points P et Q d'intersection de (D) avec Ox et Oy .

Montrer analytiquement que, si (D) passe par un point fixe de coordonnées p et q , M décrit une droite fixe, dont on formera l'équation en fonction de p et q . Expliquer géométriquement le résultat.

3. Soit M' le quatrième sommet du rectangle $OPM'Q$ construit sur OP et OQ comme côtés. Calculer les coordonnées de M' en fonction des coordonnées x_0 et y_0 de M .

Montrer que l'on a ainsi défini une transformation ponctuelle associant M' à M .

Comment doit-on choisir M pour que M' soit défini?

La transformation est-elle involutive?

Quels sont ses points doubles?

Trouver, en fonction de x_0 et y_0 , l'équation du cercle (L) de diamètre MM' et montrer que la puissance de l'origine par rapport à ce cercle est constante.

En déduire que le cercle (L) est orthogonal à un cercle fixe.

1. Limoges

On suppose que le milieu de MM' décrit une droite (Δ) . Montrer que le cercle (L) appartient alors à un faisceau, dont on discutera la nature suivant la distance de O à (Δ) . Donner une construction simple des points remarquables de ce faisceau dans chaque cas.

4. Montrer que, si M décrit une droite d'équation $ux + vy + w = 0$, M' décrit une hyperbole, dont on donnera l'équation en fonction de u, v et w . Soit (H) l'hyperbole correspondant à la droite

$$x + 2y - a = 0.$$

Construire (H) dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

Déterminer, à $\frac{1}{100}$ près par défaut, l'aire (S) comprise entre (H) , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = -3$.