∽ Baccalauréat Paris série mathématiques ∾
septembre 1952

I. - 1er sujet.

Dérivée du quotient de deux fonctions ayant une dérivée.

I. - 2e sujet

Progressions géométriques.

I. - 3e sujet

Intérêts composés.

II.

Soit (D) une droite ; M_1 et M_2 sont deux points de (D).
On pose $M_1M_2 = a$. (C_1) est un cercle de centre O_1 de rayon R_1 tangent en M_1 à (D).

Partie A.

1. Montrer qu'il existe un cercle unique (C_2) tangent à (C_1) et tangent à (D) en M2. On construira son point de contact T avec (C_1) et son centre O_2,
2. Vérifier que le rayon R2 de (C_2) est donné par R a2 2=-· 4Ri
3. Montrer qu'il existe un cercle unique (C) tangent à (C_1), (C_2) et à la droite (D) en un point du segment M_1M_2.
   On construira ses points de contact T_1 T_2 et M avec (C_1), (C_2) et la droite M_1M_2 (Il sera commode d'utiliser une inversion de centre M_1 et de puissance a^2.)
4. Calculer la longueur M_1M et le rayon R de (C) en fonction de R_1 et a.

Partie B.

Ayant orienté le support de M_1M_2 et choisi une origine sur l'axe ainsi obtenu, on suppose que les points M_1 et M_2 ont des abscisses rationnelles $\dfrac{p_1}{q_1}$ et $\dfrac{p_2}{q_2}$ telles que

$$p_2q_1 - p_1q_2 = +1,$$

les nombres $p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2$ étant des entiers positifs.

1. Montrer que les fractions $\dfrac{p_1}{q_1}$ et $\dfrac{p_2}{q_2}$ sont irréductibles.
2. En prenant $R_1 = \dfrac{1}{2q_1^2}$, établir les relations

$$R_2 = \frac{1}{2q_2^2}, \qquad R = \frac{1}{2\left(q_1+q_2\right)^2}$$

   et montrer que l'abscisse de M est égale à $\dfrac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$.

3. On désigne par Γ_1 le cercle (C) précédent, par Γ_2, le cercle tangent à (C_1), à Γ_1 et à la droite (D) en un point compris entre M_1 et le point de contact μ_1 de Γ_1 par Γ_3 le cercle défini avec Γ_1 et Γ_2 comme Γ_2 l'est avec (C_1) et Γ_1 et ainsi de suite, de sorte que Γ_n est le cercle tangent en μ_n à la droite D, tangent aux cercles Γ_{n-2} et Γ_{n-1}, μ_n étant compris entre μ_{n-2} et μ_{n-1}.
Calculer, en utilisant les résultats précédents, le rayon ρ_n du cercle Γ_n et l'abscisse u_n de son point de contact μ_n avec (D).
On désignera par α_n le terme général d'une suite d'entiers telle que

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}.$$

Il sera utile de calculer les premières valeurs de ρ_n et de u_n et de procéder par récurrence.

N. B. - Barème : question de cours, 10 ; problème obligatoire, A : 3 + 1 + 4 + 2 = 10 ; B : 3 + 4 + 3 = 10.