Baccalauréat Poitiers septembre 1967
Mathématiques élémentaires

I.

Trouver, à l'aide des tables de logarithmes, les arcs x compris entre 0°et 360°vérifiant

$$\sin x + 4\cos x = 2.$$

II.

Les axes sont orthonormés; soit (D) la droite intersection des plans d'équations $2x + y - 2z = 0$ et $x + 2y + 2z = 0$.
Trouver un système de paramètres directeurs de (D).
En déduire une représentation paramétrique de (D).
Exprimer, en fonction du paramètre, la distance du point A(+1 ; +2 ; −7) à un point quelconque de (D) ; en déduire la distance de A à (D).

III.

Dans le système orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ on donne le point fixe A(a ; 0) et un point K(0 ; m) variable; on désigne par (C) le cercle de diamètre OK; la tangente (autre que $x'x$) menée de A à (C) rencontre en M la tangente à (C) au point K.

1. Écrire l'équation de la droite AMl; calculer le coordonnées de M en fonction de m et de a; en déduire l'ensemble, (Γ), des points M.
   Retrouver géométriquement cet ensemble (Γ).
   Écrire l'équation de la polaire de M par rapport à (C) ; quelle est l'intersection de cette polaire avec l'axe $x'x$? (On peut donner une solution géométrique.)
2. On considère la transformation T faisant correspondre à tout point M de (Γ) le point P de OM tel que
   $$\overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{\text{OP}} = 4a^2.$$
   Préciser cette transformation.
   Exprimer les coordonnées de P en fonction de m; écrire l'équation de l'ensemble des points P.
3. Le point P étant considéré comme l'image d'un nombre complexe de module ρ et d'argument θ, exprimer ρ en fonction de θ ; étudier et représenter graphiquement cette fonction pour $-\dfrac{\pi}{2} < 0 < \dfrac{\pi}{2}$.
4. Calculer la dérivée de la fonction
   $$y = \text{Log }\ \text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$
   Calculer l'aire, S, du domaine compris entre la courbe de la question **3.**, l'axe des θ et des droites $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$; (on exprimera ρ en fonction de $\cos\theta$.)