∽ Baccalauréat S Polynésie septembre 1996 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Enseignement obligatoire

Un livreur de pizzas doit servir un client qui se trouve à 6 km et qui exige d'être servi à 20 h 00 précisément.
Pour se déplacer, il utilise un scooter qui roule constamment à 36 km/h (on néglige les phases d'accélération et de décélération).
Sur son trajet, il va rencontrer 2 feux tricolores non synchronisés et indépendants.
S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.
S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.
Pour chaque feu :

— la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est 1/2,
— la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est 1/4.

Soit T la variable aléatoire « temps en minutes mis par le livreur pour arriver à destination ».

1. **a.** Calculer en justifiant le calcul la probabilité $p(T = 11)$.
   b. Donner la loi de probabilité de T.
2. Calculer l'espérance mathématique de T.
3. Représenter la fonction de répartition de T.
4. Le livreur part à 19 h 49 :
   a. Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en retard ?
   b. Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en avance ?

EXERCICE 1 **5 points**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, AD = 1 et AB = 3.
Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{\text{AE}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{BF}} = \sqrt{2}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. **a.** Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure du déroulement de l'exercice.
   b. Montrer qu'il existe une rotation r telle que B = r(D) et F = r(E).
   c. Déterminer l'angle de cette rotation.
   d. Construire, en justifiant la réponse, le centre Ω de cette rotation.
2. Le plan est muni du repère orthonormal de sens direct $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AE}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.
   a. Déterminer les affixes des points A, B, C, D, E, F.
   b. Soit M un point du plan d'affixe z et M', d'affixe z', son image par r.
   Donner la relation permettant d'exprimer z' en fonction de z.
   Déterminer les coordonnées exactes de Ω.
3. Quelle est l'image par r du cercle circonscrit au triangle ADE ?

EXERCICE 2 **4 points**

1. La lettre z désignant un nombre complexe, on considère le polynôme

$$P(z) = z^2 + 4z + 29.$$

   Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ étant un repère orthonormal du plan (unité : 0,5 cm), on désigne par A, B, C les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 3, \quad z_{\text{B}} = -2+5\text{i}, \quad z_{\text{C}} = -2-5\text{i}.$$

Soit I et J les points d'affixes $z_{\text{I}} = 2+3\text{i}$ et $z_{\text{J}} = 18-5\text{i}$.

a. Placer les points A, B, C, I, J.

b. Calculer les distances IB, IC, BC et montrer que les points A, B, I, C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon et que l'on tracera.

c. Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{B}}-z_{\text{I}}}{z_{\text{J}}-z_{\text{I}}}$.

Qu'en résulte-t-il pour les points I, B, J ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4\text{e}^{-x} - \text{e}^{2x} + 10x - 3.$$

1. a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire le sens de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ et calculer $f'(0)$.

En déduire que f' s'annule pour deux valeurs α et β de x telles que $\alpha < 0 < \beta$.

2. On se propose de calculer α et β. Pour cela on pose $t = \text{e}^x$ (ou ce qui revient au même $x = \ln t$).

a. Montrer que si $f'(x) = 0$, alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.

b. Montrer que $t = 2$ est solution de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$t^3 - 5t + 2 = (t-2)\left(t^2 + at + b\right).$$

c. En déduire les solutions de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$.

d. En déduire alors les valeurs de α et β.

3. a. Vérifier que pour tout réel x non nul :

$$f(x) = x\left(\frac{4}{x\text{e}^x} - \frac{\text{e}^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x}\right).$$

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Dresser le tableau des variations de f.

4. Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités 2 cm).

5. Soit S la portion du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$.

Calculer, en cm^2, l'aire de S à 0,01 près.

Partie B

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - y' - 2y = -20x - 4.$$

1. Montrer que f est solution de (E).

2. On pose $z = y - f$.

   a. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation $\left(E'\right)$: $\quad z'' - z' - 2z = 0$.

   b. Résoudre $\left(E'\right)$ et en déduire les solutions de (E).